MATHÉMATIQUES - LEÇONS

TROISIÈMES (2023-2024)

UNITÉ A. TABLE DES MATIÈRES

E. Protat
Collège David Niépce 2023-2024

Règlement du cours de mathématiques

Afin que chacun dans la classe profite des meilleures conditions de travail possible, les élèves s'appliqueront à respecter les six règles ci-dessous.

M	Venir avec le matériel en état d'utilisation.
T	Faire son travail, en classe et à la maison.
P	Suivre le cours en silence, avoir une prise de parole appropriée.
A	Maintenir une attitude studieuse
R	Rattraper les cours (leçons, exercices et corrections) lors d'une absence dans un délai de deux jours.
S	Faire signer les documents ou évaluations dès leur distribution par le professeur.

Je serai particulièrement attentive au respect de ces six règles, et noterai tout manquement à l'une d'entre elles.

- Pour trois remarques, j'inscrirai un mot d'observation dans le carnet de correspondance.
- Pour cinq remarques, l'élève recevra une punition inscrite dans le carnet de correspondance.
- Pour 7 remarques ou plus, une retenue sera envisagée.

Afin que chacun puisse repartir sur de bonnes bases, ce fonctionnement est établi par périodes :
A chaque fin de période, les compteurs sont remis à zéro pour tous !

Signatures :

responsable légal Élève

Matériel

- en classe :
  - cahier de leçons
  - cahier d'exercices

- toujours dans la trousse :
  - stylos quatre couleurs
  - crayon de papier taillé (ou critérium)
  - gomme
  - compas
  - règle

- dans le sac :
  - calculatrice

- en géométrie :
  - équerre
  - rapporteur

Le matériel est individuel et obligatoire !

Il doit être maintenu en bon état et remplacé s'il est défectueux (calculatrice en panne, compas incomplet, règle abîmée...)

UNITÉ A. DIFFÉRENTES ÉCRITURES D'UN NOMBRE

I . PUISSANCES D'UN NOMBRE

1) EXPOSANT POSITIF

Définition :

On appelle puissance d'un nombre tout produit issu de la répétition d'un même facteur.

Soient n un nombre entier positif non nul et a un nombre relatif.

On note : $a^n = a \times .... \times a$ où le facteur a se répète à n reprises dans le produit.

Dans ce cas, a^n est une puissance de a et n est son exposant.

Par convention on a : $a^0 = 1$ et $a^1 = a$

Exemples :

a) $(-3)^0 = 1$

b) $4^1 = 4$

c) $10^0 = 1$

d) $10^5 = 100\,000$

e) $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$

f) $\left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) = \frac{-8}{125}$

Remarque : Si l'exposant d'une puissance est pair, le résultat est toujours un nombre positif ! Donc un carré est toujours pair ($a^2 > 0$ pour toute valeur de a).

2) EXPOSANT NÉGATIF

Définition :

On parle de puissance d'exposant négatif lorsque l'exposant peut s'écrire sous la forme $-n$ où n est un nombre positif non nul.

On note : $a^{-n} = \frac{1}{a \times .... \times a}$ où le facteur a se répète à n reprises dans le produit.

Exemples :

a) $(-3)^{-1}=\frac{1}{3}$

b) $4^{-3}=\frac{1}{4\times4\times4}=\frac{1}{64}=0{,}015625$

c) $10^{-4}=\frac{1}{10\times10\times10\times10}=\frac{1}{10\,000}=0{,}0001$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{4}{9}\right)}=1\times\frac{9}{4}=\frac{9}{4}=2{,}25$

rappel : diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse...

e) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{7}{3}\right)\times\left(\frac{7}{3}\right)\times\left(\frac{7}{3}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{343}{27}\right)}=\frac{27}{343}$

remarque : certaines puissances n'ont pas d'écriture décimale !

II . PUISSANCES DE 10 (RAPPEL)

Tableau de passage des valeurs décimales aux puissances de 10 à connaître ♥ :

Puissance de 10	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}
Valeur décimale	0,000000001	0,000001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1 000	1 000 000	1 000 000 000

Tableau des préfixes des unités de mesure et les puissances de 10 à connaître ♥ :

Téra	Giga	Méga	kilo	hecto	déca		déci	centi	milli	micro	nano	pico
(T)	(G)	(M)	(k)	(h)	(da)		(d)	(c)	(m)	(µ)	(n)	(p)
10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{2}	10^{1}	10^{0}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}

III . NOTATION SCIENTIFIQUE

Définition : Notation scientifique

Un nombre est écrit en notation scientifique s'il est sous la forme :

$\boxed{a \times 10^n}$ Où n est un entier

et $1 \leq a < 10$

Exemples : les nombres suivants sont écrits en notation scientifique

$4{,}5 \times 10^4$ $1{,}31 \times 10^5$ $1{,}057 \times 10^7$

$3{,}01 \times 10^{-3}$ 3×10^{-3} $7{,}9 \times 10^0$

Contre-exemples : Les nombres suivants ne sont pas en notation scientifique

45×10^3 ; $0{,}9 \times 10^4$; $2{,}01$

Application

1. Donner l'écriture décimale des nombres suivants écrits en notation scientifique :

a) $4 \times 10^2 = 400$

b) $1{,}54 \times 10^6 = 1\,540\,000$

c) $8{,}45 \times 10^{-2} = 0{,}0845$

d) $7{,}5 \times 10^1 = 7{,}5$

2. Donner l'écriture scientifique des nombres décimaux suivants :

a) $5\ 000 = 5 \times 10^3$

b) $23\ 400 = 2{,}34 \times 10^4$

c) $0{,}007\,8 = 7{,}8 \times 10^{-3}$

d) $0{,}000\,010\,4 = 1{,}04 \times 10^{-5}$

UNITÉ B. OPÉRATIONS

I. RAPPELS : NOMBRES RELATIFS

ADDITION :

- Pour additionner deux nombres relatifs de même signe :
  - on garde le signe ;
  - on ajoute les distances à zéro.

5,2 + 3,4 = 8,6 (positif + positif = positif)

- 7,8 + (- 5,4) = (- 13,2) (négatif + négatif = négatif)

- Pour additionner deux nombres relatifs de signes contraires :
  - on choisit le signe de la plus grande distance à zéro ;
  - on calcule l'écart entre les distances à zéro.

- 13,8 + 9,5 = (- 4,3)

->signe négatif car 13,8 > 9,5 et on calcule la différence entre 9,5 et 13,8.

- 5,7 + 12,4 = 6,7

->signe positif car 12,4 > 5,7 et on calcule la différence entre 5,7 et 12,4.

SOUSTRACTION :

Pour soustraire un nombre relatif, on ajoute son opposé.

- Lorsqu'on soustrait un nombre positif, on considère qu'on ajoute un nombre négatif.

5,9 – 8,7 = 5,9 + (- 8,7) = (- 2,8)

- Pour soustraire un nombre négatif, on ajoute sa distance à zéro.

-14,9 - (- 4,5) = -14,9 + 4,5 = -10,4

MULTIPLICATION :

- **Règles des signes**
  - négatif × positif = négatif
  - négatif × négatif = positif
  - positif × positif = positif
  - positif × négatif = négatif

- Pour multiplier deux nombres relatifs :
  - on choisit le signe avec la règle des signes ;
  - on calcule le produit des distances à zéro.

7 × (- 4) = (- 28) positif × négatif = négatif

(- 8) × (- 9) = 72 *négatif × négatif = positif*

PRODUIT DE PLUS DE DEUX FACTEURS :

- si le nombre de facteurs négatifs est pair, le résultat est positif.
- Si le nombre de facteurs négatifs est impair, le résultat est négatif.

- 7 × 4 × (- 6) × 3 × (- 1) est négatif

II. RAPPELS : NOMBRES EN ÉCRITURE FRACTIONNAIRE

ADDITION ET SOUSTRACTION DE DEUX FRACTIONS :

Pour additionner deux fractions de même dénominateur :

- on additionne les numérateurs ;
- on garde le même dénominateur.

-> $\frac{5}{6} + \frac{15}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$ **(simplification finale par 2)**

-> $\frac{4}{7} - \frac{12}{7} = \frac{(4-12)}{7} = \frac{-8}{7}$

-> $\frac{5}{3} + \frac{1}{7} = \frac{5 \times 7}{(3 \times 7)} + \frac{1 \times 3}{(7 \times 3)} = \frac{35}{21} + \frac{3}{21} = \frac{38}{21}$

(on passe par des fractions de même dénominateur)

PRODUIT DE FRACTIONS :

Pour déterminer le produit de deux fractions

- on multiplie les numérateurs entre eux ;
- on multiplie les dénominateurs entre eux.

-> $\frac{1}{3} \times \frac{8}{11} = \frac{1 \times 8}{3 \times 11} = \frac{8}{33}$

-> $\frac{4}{5} \times 7 = \frac{4}{5} \times \frac{7}{1} = \frac{4 \times 7}{5 \times 1} = \frac{28}{5}$

-> $\frac{24}{9} \times \frac{21}{16} = \frac{24 \times 21}{9 \times 16} = \frac{3 \times 8 \times 3 \times 7}{3 \times 3 \times 8 \times 2} = \frac{7}{2}$

On peut simplifier à l'intérieur du calcul
si on reconnaît des facteurs communs au numérateur et dénominateur

III. RAPPELS : QUOTIENTS

QUOTIENT DE DEUX NOMBRE RELATIFS :

- On choisit le signe avec la règle des signes
- on calcule le quotient des distances à zéro.

-> $18 : (-3)$ *résultat négatif, puis on calcule* $18:3=6$.

Donc $18 : (-3) = (-6)$

-> $(-45) : (-9)$ *résultat positif, puis on calcule* $45:9=5$.

Donc $(-45) : (-9) = (+5)$

QUOTIENT DE FRACTIONS :

Diviser par une fraction revient à multiplier par l'inverse de cette fraction.

-> $\frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{3\times8}{4\times5} = \frac{24}{20}$

-> $\frac{7}{9} : 3 = \frac{7}{9} : \frac{3}{1} = \frac{7}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{27}$

UNITÉ C. ARITHMÉTIQUE

I. DIVISEURS ET MULTIPLES

Définition : Soient a et b des nombres entiers.

a est un diviseur de b si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Dans ce cas, b est un multiple de a. On note a | b.

Exemples :

- 100 est divisible par 20. En effet 100 = 20 × 5.
- 456 n'est pas divisible par 16.
  En effet 456 = 16 × 28 + 8. Le reste de la division euclidienne est 8 !

II. CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ PAR 2, 3, 4, 5, 8, 9.

2 : un nombre est divisible par 2 lorsque le chiffre des unités est : 0, 2, 4, 6 ou 8	13 574 ; 279 836
5 : un nombre est divisible par 5 lorsque le chiffre des unités est : 0 ou 5	3 570 ; 14 235
10 : un nombre est divisible par 10 lorsque le chiffre des unités est : 0	120 ; 13 000
4 : un nombre est divisible par 4 lorsque le nombre constitué du chiffre des dizaines et du chiffre des unités est un multiple de 4 : 00, 04, 08, 12,............80, 84, 88, 92, 96	148 ; 57 376
3 : un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est un nombre multiple de 3	741 (7+4+1 = 12) ; 8 433 (8+4+3+3 = 18)
9 : un nombre est divisible par 9 lorsque la somme de ses chiffres est un nombre multiple de 9	12 345 678 (1+2+3+4+5+6+7+8 = **36)**

- Si un nombre est divisible par 2 et par 3, alors il est divisible par 6. (2×3 = 6)
- Si un nombre est divisible par 10, il est forcément divisible par 2 et par 5. (10 = 2×5)

III . NOMBRES PREMIERS

Définition :

Les nombres ayant uniquement deux diviseurs distincts sont appelés des nombres premiers.

Dans ce cas, leurs uniques diviseurs sont 1 et eux-même.

1 n'est pas un nombre premier : il a un unique diviseur !

Exemples :

- 7 est un nombre premier.
  En effet ses seuls diviseurs sont 1 et 7.
  (7 n'est pas divisible par 2, 3, 4, 5, 6)
- 9 n'est pas un nombre premier.
  9 est divisible par 1,3 et 9.
  (trois diviseurs)
- 33 n'est pas un nombre premier.
  Les deux diviseurs évidents sont 1 et 33 mais 33 est aussi divisible par 11 par exemple.
  (au moins trois diviseurs).

Nombres premiers à connaître :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ;

31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97...

IV . DIVISEURS COMMUNS

Définition :

On appelle diviseur commun aux nombres a et b un nombre qui divise a et qui divise aussi b.

Exemple :

- Cherchons les diviseurs communs de 8 et 20 :

  diviseurs de 8 : 1 ; 2 ; 4 ; 8

  diviseurs de 20 : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20

  Les diviseurs communs de 8 et 20 sont : 1 ; 2 ; 4.

Définition :

Si deux nombres n'ont pas de diviseurs communs autres que 1,
on dit que ce sont des nombres premiers entre eux.

Exemple :

- Les nombres 46 et 35 sont premiers entre eux :

  diviseurs de 46 : 1 ; 2 ; 23 ; 46

  diviseurs de 35 : 1 ; 5 ; 7 ; 35

  46 et 35 n'ont pas de diviseurs communs autres que 1.

Remarque : tous les nombres premiers sont premiers entre eux !

V . FRACTIONS IRRÉDUCTIBLES

Définition :

On appelle fraction irréductible une fraction écrite avec des entiers premiers entre eux.

Exemples :

- $\frac{35}{63}$ n'est pas une fraction irréductible car on peut diviser le numérateur et les dénominateur par 7.
- $\frac{35}{46}$ est une fraction irréductible car 35 et 46 sont premiers entre eux.

VI . DÉCOMPOSITION EN FACTEURS PREMIERS

Propriété :

Tout nombre entier peut être décomposé en un produit de facteurs premiers.

Cette décomposition est unique.

Exemples :

- $66 = 6 \times 11 = 2 \times 3 \times 11$ -> Ce dernier produit ne contient que des facteurs premiers.
- $423 = 3 \times 141 = 3 \times 3 \times 47$ -> Ce dernier produit ne contient que des facteurs premiers.

  (on peut aussi noter : $3^2 \times 47$ produit de puissances de nombres premiers)

Méthode avec algorithme de décomposition :

Nombres premiers : 2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 13 - 17 - 19 - 23 - 19 ...

Nombre à décomposer	Diviseurs premiers
11550	2
5775	3
1925	5
385	5
77	7
11	11
1	

Donc :

$11\,550 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 11$

$= 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11$

A la calculatrice : Décomposons 45 798 en produit de facteurs premiers

45798 EXE -> 45798

Seconde ├ -> $2 \times 3 \times 17 \times 449$

Remarque :

Partons de la décomposition en produit de facteurs premier de deux nombres :

$$\begin{aligned} 84 &= 2 \times 2 \times 3 \times 7 \\ 70 &= 2 \times 5 \times 7 \end{aligned}$$

- On peut utiliser cette décomposition pour simplifier une fraction en fraction irréductible.

  $$\frac{84}{70} = \frac{\cancel{2}\times 2\times 3\times \cancel{7}}{\cancel{2}\times 5\times \cancel{7}} = \frac{2\times 3}{5} = \frac{6}{5}$$

  La décomposition ne comportant que des facteurs premiers, la simplification est immédiate et les produits restants sont premiers entre eux.

- On peut utiliser cette décomposition pour déterminer :
  - le plus grand diviseur commun de deux nombres :
    $PGCD\left(84\ ;\ 70\right) = \mathbf{2 \times 7} = 14$
  - le plus petit multiple commun de deux nombres :
    $PPCM\left(84\ ;\ 70\right) = 2 \times 3 \times \mathbf{2 \times 7} \times 5 = 420$

VII . PGCD ET PPCM

1) PGCD

Quand utiliser le Plus Grand Diviseur Commun ?

Si l'énoncé demande de déterminer de partager plusieurs quantités en un plus grand nombre de lots identiques possibles sans reste.

- Soit on fait les listes complètes des diviseurs (intéressant pour de petits nombres).

Exemple : **On veut faire un maximum de bouquets de fleurs identiques et en utilisant toutes les fleurs suivantes : 54 tulipes et 36 roses.**

Diviseurs de 54 :

1	2	3	6
54	27	$\boxed{18}$	9

Diviseurs de 36 :

1	2	3	4	6
36	$\boxed{18}$	12	9	

Le plus grand diviseur commun de 54 et 36 est 18 donc on peut faire au maximum 18 bouquets identiques et sans perte.

- Soit on utilise la décomposition en facteurs premiers (intéressant pour les nombres ayant beaucoup de diviseurs).

Exemple : **On veut carreler une salle des fêtes de 44,2 m par 39 m en utilisant des dalles carrées les plus grandes possibles sans avoir à faire de découpes.**

① il faut raisonner sur des nombres entiers :

ici on convertira donc en 442dm et 390dm.

Décompositions en produit de facteurs premiers :

$442=2\times13\times17$

$390=2\times3\times5\times13$

Le plus grand diviseur commun de 442 et 390 est $2\times13=26$ donc les dalles mesureront 26 dm de côté.

2) PPCM

Quand utiliser le Plus Petit Multiple Commun ?
Si l'énoncé porte sur plusieurs phénomènes périodiques (répétitifs) et vise à déterminer au bout de combien de répétitions au minimum on revient à la situation initiale.

- Soit on fait les listes complètes des multiples (petits nombres).

Exemple : **On a une roue A comportant 12 dents et une roue B comportant 15 dents, on a collé une pastilles sur chaque roue.**
Au bout de combien de tours au minimum les deux pastilles seront-elles revenues en place ?

Multiples de 12 dents : roue A

12 24 36 48 $\boxed{60}$ 72 → $60=12\times5$

Multiples de 15 dents : roue B

15 30 45 $\boxed{60}$ 75 → $60=15\times4$

Le plus petit multiple commun à 12 et 15 est 60, donc il faut que $\boxed{\text{60 dents}}$ soient passées. Cela revient à $\boxed{\text{5 tours de la roue A et 4 tours de la roue B}}$.

- Soit on utilise la décomposition en facteurs premiers (grands nombres).

Exemple : **Hugo et Victor font des tours de vélo dans leur quartier. Tous deux partent de la même adresse mais empruntent deux boucles distinctes : il ne peuvent se croiser que sur leur point de départ.**
Victor fait un circuit en 4 min 20s et Hugo fait un circuit en 5 min 40 s

⓵ il faut raisonner sur des nombres entiers : on convertit en 260s et 340s.

Décompositions en produit de facteurs premiers :

Victor : $260=\mathbf{2\times2\times5}\times13$

Hugo : $340=\mathbf{2\times2\times5}\times17$

Le plus petit multiple commun de 260s et 340s est $\mathbf{2\times2\times5}\times17\times13=4420$ donc ils se croiseront de nouveau au bout de 4 420s, c'est à dire 73min et 40s, ou encore $\boxed{\text{1h 13min et 40s}}$.

Ce qui revient à $\boxed{\text{17 tours pour Victor et 13 tours pour Hugo}}$.

UNITÉ D. CALCUL LITTÉRAL

I. RAPPELS :

1) EXPRESSIONS LITTÉRALES

Définition :
Une expression littérale est une expression mathématique constitué de symboles opératoires, de nombres et de lettres. Chaque lettre représente un même nombre dans l'expression mais dont la valeur peut changer. Ces lettres sont appelées des variables.

Exemple : Soit l'expression littérale $2\times p+p\times p-5$.

- si $p=1$, l'expression devient : $2\times 1+1\times 1-5=2+1-5=-2$
- si $p=(-4)$, l'expression devient : $2\times(-4)+(-4)\times(-4)-5=-8+16-5=3$

Remarque:

Pour simplifier l'écriture des expressions littérales, on utilisera leur forme réduite.
Cela consiste à ne pas écrire les symboles × inutiles (avant les parenthèses ou les lettres), et à effectuer les calculs possibles en respectant les priorité opératoires.
Afin d'être plus efficace, on peut être amené à changer l'ordre des facteurs !

Exemple: Réduire les expressions suivantes.

- $2\times p+p\times p-5=2p+p^2-5$
- $3\times(8\times x+7)-(-4-x\times 6)\times 5\times x=3(8x+7)-5x(-4-6x)$

Définition :
Deux expressions littérales sont égales si et seulement si elles ont les mêmes valeurs quelles que soient les valeurs données aux variables.

Exemple :

- Les expressions $8\times t-5$ et $6+2\times t-5$ sont-elles égales ?

Non ! On peut trouver un contre exemple.

Pour $t=0$

- $8\times t - 5 = 8\times 0 - 5 = 0 - 5 = -5$
- et $6 + 2\times t - 5 = 6 + 2\times 0 - 5 = 1$

* Les expressions $8\times t-5+t$ et $10-2\times t+11\times t-15$ sont-elles égales ?

  Oui ! En réduisant les expressions, on retombe sur la même expression.

  - $8\times t - 5 + t = 8t - 5 + t = 9 - 5$
  - $10 - 2\times t + 11\times t - 15 = 10 - 2t + 11t - 15 = 9t - 5$

Définition :

Une expression littérale est écrite sous forme développée si elle est constitué d'une somme ou d'une différence de termes.

Exemple : $5\times x + 3 - 4x$ est écrit sous forme développée.

On peut réduire son écriture et ne faire apparaître que des additions et soustractions de termes :

$5 \times x + 3 - 4x = 5x + 3 - 4x = x + 3$

Définition :

Une expression littérale est écrite sous forme factorisée si elle est constituée d'un produit de facteurs.

Exemple : $6x \times (4 \times x - 9)$ est écrit sous forme factorisée.

Si on réduit son écriture, on reconnaît un produit de facteurs.

$6x \times (4 \times x - 9) = 6x(4x - 9)$

Remarque : Une expression peut n'être ni développée, ni factorisée !

$3x - 6x(4x - 9)$, l'expression est constituée d'une différence entre un terme et un produit.

2) RAPPEL : DISTRIBUTIVITÉ SIMPLE

Propriété : distributivité simple

Pour tous nombres a, b, k il y a égalité entre les expressions suivantes :

$$\underbrace{k \times (a + b)}_{\text{forme factorisée}} = \underbrace{k \times a + k \times b}_{\text{forme développée}}$$

Remarque : De même pour les soustractions !

$$\underbrace{k \times (a - b)}_{\text{forme factorisée}} = \underbrace{k \times a - k \times b}_{\text{forme développée}}$$

Exemples : Développer les expressions suivantes.

- $5(4x+1) = 5 \times 4x + 5 \times 1 = 20x+5$
- $(3-7x) \times 6x = 3 \times 6x - 7x \times 6x = 18 - 42x^2$
- $8 + 5x(-2x+1) = 8 + (-10x^2) + 5x = -10x^2 + 5x + 8$
  Attention : priorité aux produits, on développe avec le facteur $5x$ sans toucher au terme 8 + ...

Exemples : Factoriser les expressions suivantes.

- $4x - 24 = 4 \times x - 4 \times 6 = 4(x-6)$
- $4x^2 - 7x = x \times 4x - x \times 7 = x(4x-7)$

3) RAPPEL : ÉQUATIONS

Définition:

Résoudre une équation consiste à rechercher pour quelle(s) valeur(s) de l'inconnue, l'égalité est vraie.

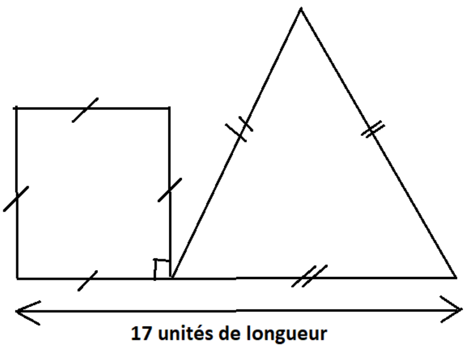
Exemples :

$8x - 5 = 2 - 13x$	
$21x - 5 = 2$	On ajoute $13x$ afin d'annuler un terme en x à droite
$21x = 7$	On ajoute 5 afin d'annuler un terme sans x à gauche
$x = \frac{1}{3}$	On divise par 21 pour obtenir la valeur d'un x **La solution est** : $x = 1/3$
$\frac{5}{2}x - \frac{4}{3} = \frac{1}{6} - 4x$	
$\frac{15}{6}x - \frac{8}{6} = \frac{1}{6} - \frac{24}{6}x$	On utilise le même dénominateur
$15x - 8 = 1 - 24x$	On multiplie tous les termes par le dénominateur commun afin d'obtenir des coefficients entiers
$39x - 8 = 1$	
$39x = 9$	
$x = \frac{9}{39}$	**La solution est** : $x = 9/39$
$7(x + 5) = 3x - 4$	
$7x + 35 = 3x - 4$	On utilise la distributivité pour développer l'expression
$4x + 35 = -4$	
$4x = -39$	
$x = \frac{-39}{4}$	**La solution est** : $x = -39/4$

Cas particuliers :

- $8x - 12 = 4(2x - 3)$ équivaut à $8x - 12 = 8x - 12$
  Cette égalité est toujours vraie quelle que soit la valeur de x, donc **tous les nombres sont solution.**
- $5(x + 7) = 40 + 5x$ équivaut à $35 = 40$
  Cette égalité est toujours fausse donc l'équation n'a **aucune solution.**
- $x^2 = 25$, cette égalité est satisfaite pour $x = 5$ et pour $x = (-5)$
  Nous verrons plus tard dans le cours que cette équation a exactement deux solutions.

Mise en équation d'un problème :



Pour quelle longueur du côté du carré le périmètre du carré est-il égal au périmètre du triangle équilatéral ?

Inconnue : x (longueur du côté du carré)

$$\textit{Périmètre}_{\text{carré}} = \textit{Périmètre}_{\text{triangle équilatéral}}$$

$$4 \times x = 3 \times (17 - x)$$

$$4x = 51 - 3x$$

$$7x = 51$$

$$x = \frac{51}{7}$$

Remarque :

La longueur recherchée est un nombre en écriture fractionnaire (nombre rationnel).

L'inconnue n'a pas de valeur décimale : $x \simeq 7{,}29$ unités de longueur .

II . SOUSTRAIRE UNE EXPRESSION LITTÉRALE

On se rappelle que soustraire un terme équivaut à ajouter son opposé.

1) OPPOSÉ D'UNE EXPRESSION

Soit l'expression $3x+5$, pour calculer son opposé, il suffit de la multiplier par (-1).

Donc : $\underbrace{-(3x+5)}_{\text{l'opposé de }(3x+5)} = (-1)\times(3x+5)$.

On en déduit que :

$$-(3x+5)=(-1)\times(3x+5)=(-1)\times 3x+(-1)\times 5=-3x+(-5)=-3x-5$$

On se contentera de noter : $-(3x+5) = -3x-5$

Par exemple : l'opposé de $2x-4$ est $-(2x-4) = -2x+4$

2) APPLICATION

Pour soustraire une expression littérale, on ajoutera donc son opposé !

Exemples :

- $7 - (3x+5)=7+(-3x-5)=7+(-3x)+(-5)=7-3x-5=2-3x$
- $x - (2x-4) = x+(-2x+4)=x-2x+4=-x+4$

3) RÉSOLUTION D'ÉQUATION

Résoudre l'équation suivante :

$7x-(9x+5) = (5x+6)+(8-3x)$ $7x-9x-5 = 5x+6+8-3x$	On simplifie l'écriture des expressions littérales : • on ajoute l'opposé à gauche ; • à droite, la parenthèse du premier terme est inutile ; • à droite la parenthèse est inutile dans le cas d'une addition.
$-2x-5 = 2x+14$	On réduit.
$x = -19/4$	Après résolution...

III . DISTRIBUTIVITÉ DOUBLE

1) PROPRIÉTÉ

Propriété : distributivité double

Pour tous nombres a, b, c et d il y a égalité entre les expressions suivantes :

$$\underbrace{(a+b)(c+d)}_{\text{forme factorisée}} = \underbrace{ac+ad+bc+bd}_{\text{forme développée}}$$

Démonstration :

$(a+b)(c+d)$ on considère $(a+b)$ comme le facteur commun

$=(a+b)\times d+(a+b)\times d$ on développe, on trouve deux expressions à distribuer

$=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$ on développe, on obtient quatre termes

$=ac+ad+bc+bd$ on réduit

Exemples : Développer et réduire les expressions suivantes en utilisant la propriété de double distributivité.

- $$\begin{aligned}(5+4x)(3x+7) &= 5\times 3x+5\times 7+4x\times 3x+4x\times 7\\ &= 15x+35+12x^2+28x\\ &= 43x+35+12x^2\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(3-7y)(y+8) &= (3+(-7y))(y+8)\\ &= 3y+24+(-7y^2)+(-56y)\\ &= 3y+24-7y^2-56y\\ &= -53y+24-7y^2\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(-7+8x)(4x-9) &= ((-7)+8x)(4x+(-9))\\ &= (-28x)+(+63)+32x^2+(-72x)\\ &= -28x+63+32x^2-72x\\ &= -100x+63+32x^2\end{aligned}$$

2) IDENTITÉ REMARQUABLE

Remarque : soient a et b deux nombres relatifs quelconques.

$$(a + b)(a - b)$$
$$= a^2 - ab + ab - b^2$$
$$= a^2 - b^2$$

Propriété : Quels que soient les nombres relatifs a et b :

- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Exemple : développer et réduire l'expression suivante.

- $(2 + 7x)(2 - 7x) =$

Exemple : factoriser l'expression suivante.

- $49 - 100x^2 =$

on reconnaît la forme $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec :

$a^2 \rightarrow 49 = (7)^2$ $\quad$ $b^2 \rightarrow 100x^2 = (10x)^2$

Donc $49 - 100x^2 = (7)^2 - (10x)^2 = (7 - 10x)(7 + 10x)$

Propriété : Quels que soient les nombres relatifs a et b :

- $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

Démonstration :

- $$\begin{aligned} &(a+b)^2 \\ &= (a+b)(a+b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2\ ab \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} &(a-b)^2 \\ &= (a-b)(a-b) \\ &= a^2 - ab - ba + (+b^2) \\ &= a^2 + b^2 + 2\ ab \end{aligned}$$

Exemple : développer et réduire les expressions suivantes.

- $$\begin{aligned} (3+5\ x)^2 &= 3^2 + (5\ x)^2 + 2 \times 3 \times 5\ x \\ &= 9 + 25\ x^2 + 30\ x \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} (4x-3)^2 &= (4x)^2 + 3^2 - 2 \times 4x \times 3 \\ &= 16x^2 + 9 - 24x \end{aligned}$$

IV . EQUATIONS PRODUIT NUL

Définition :

On appelle équation produit nul toute équation de la forme $A \times B = 0$ où les facteurs A et B sont des expressions littérales.

Propriété :

Quels que soient les facteurs A et B, $A \times B = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$

Exemples : résoudre les équations produits nuls suivantes.

- $x \times (5 + x) = 0$

  donc $\boxed{x = 0}$ ou $\boxed{\begin{array}{c} (5 + x) = 0 \\ x = -5 \end{array}}$, l'équation a deux solutions : 0 et -5.

- $(x - 3) \times (x + 2) = 0$

  donc $\boxed{\begin{array}{c} (x - 3) = 0 \\ x = 3 \end{array}}$ ou $\boxed{\begin{array}{c} (x + 2) = 0 \\ x = -2 \end{array}}$, l'équation a deux solutions : 3 et -2.

- $(2x + 3) \times (4x - 7) = 0$

  donc $\boxed{\begin{array}{c} (2x + 3) = 0 \\ 2x = -3 \\ x = \frac{-3}{2} \end{array}}$ ou $\boxed{\begin{array}{c} (4x - 7) = 0 \\ 4x = 7 \\ x = \frac{7}{4} \end{array}}$, l'équation a deux solutions : $\frac{-3}{2}$ et $\frac{7}{4}$.

Pour aller plus loin : résoudre les équations suivantes.

- $-4x^2 + 10x = 0$ -> on peut penser à factoriser ! $2x \times 2x + 2x \times 5 = 0$

  $2x \times (2x + 5) = 0$

  donc $\boxed{\begin{array}{c} 2x = 0 \\ x = 0 \end{array}}$ ou $\boxed{\begin{array}{c} (2x+5) = 0 \\ x = \frac{-5}{2} \end{array}}$, l'équation a deux solutions : 0 et -5/2.

- $x^2 - 9 = 0$ -> on peut factoriser l'identité remarquable ! $\begin{array}{c} x^2 - 3^2 = 0 \\ (x-3) \times (x+3) = 0 \end{array}$

  donc $\boxed{\begin{array}{c} (x-3) = 0 \\ x = 3 \end{array}}$ ou $\boxed{\begin{array}{c} (x+3) = 0 \\ x = -3 \end{array}}$, l'équation a deux solutions : 3 et -3.

- $x^2 = 25$,

  si les deux membres sont égaux, leur différence est nulle : $\begin{array}{c} x^2 - 25 = 0 \\ x^2 - 5^2 = 0 \\ (x-5)(x+5) = 0 \end{array}$

  donc $\boxed{\begin{array}{c} (x-5) = 0 \\ x = 5 \end{array}}$ ou $\boxed{\begin{array}{c} (x+5) = 0 \\ x = -5 \end{array}}$, l'équation a deux solutions : 5 et – 5.

UNITÉ E. STATISTIQUES

I. VOCABULAIRE

Pour étudier une série de données statistiques, on utilise un vocabulaire spécifique :

Exemple 1 :

Un pêcheur a mesuré la taille des poissons d'une même espèce remontés dans son filet. Voici ses mesures (en cm) :

9 – 13 – 11 – 10 – 12 – 13 – 14 – 14 – 10 – 14 – 14 – 10 – 14 – 12 – 15 – 15 – 12 – 15 – 15 – 13 – 15 – 15 – 13 – 13 - 15

Population :

Poissons remontés dans le filet.

Caractère :

Taille (en cm)

*→ C'est un caractère **quantitatif** (nombre)*

Valeurs du caractère :

{ 9 ; 10 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 }

Effectif total :

25 (on compte les poissons)

Effectif d'une valeur :

L'effectif de la valeur 13 est 5.

(on retrouve 5 poissons de 13 cm)

Exemple 2 :

Dans une classe de 4eme, le professeur a noté les différents sports pratiqués par ses élèves (chaque élève pratique un sport exactement).

sport	foot	danse	roller	judo	gym	volley
Nombre d'élèves	*6*	*5*	*5*	*4*	*2*	*4*

Population :

Élèves d'une classe de 4ème

Caractère :

Sport

*→ C'est un caractère **qualitatif***

Valeurs du caractère :

{ foot ; danse ; roller ; judo ; gym ; volley }

Effectif total :

26 (6+5+5+4+2+4)

Effectif d'une valeur :

L'effectif de la danse est 5.

(c'est le nombre d'élèves pratiquant la danse)

Définition :

L'effectif total de la série statistique est le nombre total de données.

L'effectif d'une valeur est le nombre de données qui ont cette valeur.

II. ORGANISATION DE DONNÉES STATISTIQUES

1. TABLEAUX

Définition :

On appelle tableau d'effectifs un tableau qui regroupe les données par valeur du caractère étudié et qui indique l'effectif de chaque valeur. *(comme dans l'exemple 2)*

2. CLASSES

Définition :

Si les données d'un caractère quantitatif sont nombreuses, on les regroupe en classes :

l'amplitude d'une classe est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de la classe.

Exemple 3 :

On demande à des élèves de 4ème combien de SMS ils envoient par jour.

On regroupe les données dans des classes d'amplitude 30.

classe

Nombre *n* de SMS	$0 \leqslant n < 30$	$30 \leqslant n < 60$	$60 \leqslant n < 90$	$90 \leqslant n < 120$	$120 \leqslant n < 150$
effectif	2	6	10	5	1

-> on lit que 6 élèves envoient entre 30 et 59 SMS par jour.

III. FRÉQUENCE D'UNE VALEUR

Définition :

La fréquence d'une valeur est le quotient : $\dfrac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}}$

Exemple 1 :

Un pêcheur a mesuré la taille des poissons d'une même espèce remontés dans son filet. Voici ses mesures (en cm) :

9 – 13 – 11 – 10 – 12 – 13 – 14 – 14 – 10 – 14 – 14 – 10 – 14 – 12 – 15 – 15 – 12 – 15 – 15 – 13 – 15 – 15 – 13 – 13 - 15

Fréquences :

$$f_{13} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 20\ \% = 0{,}2$$

Exemple 2 :

Dans une classe de 5eme, le professeur a noté les différents sports pratiqués par ses élèves (chaque élève pratique un sport exactement).

sport	*foot*	*danse*	*roller*	*judo*	*gym*	*volley*
Nombre d'élèves	*6*	*5*	*5*	*4*	*2*	*4*

Fréquences :

$$f_{danse} = \frac{5}{26} \simeq 0{,}19 \simeq 19\ \%$$

Remarque :

- une fréquence est un nombre compris entre 0 et 1.
- la somme des fréquences de toutes les valeurs d'une série statistique est égale à 1.
- une fréquence peut être exprimée en écriture décimale, fractionnaire ou sous la forme d'un pourcentage.

IV. MOYENNE

Définition :

La moyenne d'une série statistique de données numériques est le quotient de la somme des valeurs par l'effectif total.

Pour une série { $a_1 ; a_2 ; a_3 ; ... ; a_n$ } on a $Moyenne = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{effectif\ total}$

Application :

Calculer la moyenne de la série : { 5,1 ; 3,4 ; 5,1 ; 9,8 ; 3,7 ; 7,5 }

$$Moyenne = \frac{5{,}1 + 3{,}4 + 5{,}1 + 9{,}8 + 3{,}7 + 7{,}5}{6}$$

Remarque : si une valeur se répète plusieurs fois dans la série, il faut la compter autant de fois qu'elle apparaît ! On parle alors de moyenne pondérée.

$$Moyenne_{pondérée} = \frac{5{,}1 \times 2 + 3{,}4 + 9{,}8 + 3{,}7 + 7{,}5}{6}$$

Exemple 1 : moyenne simple

Jour	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	samedi
Recette	189	347	253	325	458

effectif total → 5 jours

$$moyenne = \frac{189 + 347 + 253 + 325 + 458}{5} = \frac{1572}{5} = 314{,}40\,€$$

Exemple 2 : moyenne pondérée

Age	12 ans	13 ans	14 ans	15 ans
Effectif	3	9	11	1

effectif total → 3+9+11+1 = 24

$$moyenne_{pondérée} = \frac{12 \times 3 + 13 \times 9 + 14 \times 11 + 15 \times 1}{24} = \frac{322}{24} \simeq 13{,}4\ ans$$

V. MÉDIANE ET ÉTENDUE D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

Définition :

Soit une série statistique dont les données numériques sont triées en ordre croissant ou décroissant.

On appelle médiane de la série un nombre qui partage la série en deux groupes de même effectif :

- un groupe regroupe les valeurs inférieures ou égales à cette médiane,
- un groupe regroupe les valeurs supérieures ou égales à cette médiane.

Exemple 1 : cas où l'effectif total est impair.

Déterminer la médiane de la série : {253 ; 458 ; 347; 325 ; 189}

Il y a 5 données (impair).

On ordonne : 189 < 253 < 325 < 347 < 458

La médiane est 325, il y a deux valeurs inférieures et deux valeurs supérieures.

Exemple 2 : cas où l'effectif total est pair.

Déterminer la médiane de la série : {13 ; 12 ; 15 ; 15 ; 12 ; 13; 12 ; 15 ; 15 ; 12}

Il y a 10 données (pair).

Dans une série dont l'effectif total est pair, si la médiane est comprise entre deux valeurs différentes, on prend une valeur intermédiaire.

{13 ; 12 ; 15 ; 15 ; 12 ;14 ; 12 ; 15 ; 15 ; 12}

On classe les données dans l'ordre croissant : $12 \leq 12 \leq 12 \leq 12 \leq 13 \leq 14 \leq 15 \leq 15 \leq 15 \leq 15$

Une médiane possible est 13,5
car 13<13,5<14

Exemple : avec un tableau d'effectifs.

Un collège a organisé une course d'endurance. Voici les distances parcourues par les participants :

Distance (km)	1	2	3	4	5	6
Effectif	32	115	192	221	85	23

Par le raisonnement :

- Pour déterminer la médiane, on cherche l'effectif total : 32+115+192+221+85+23 = 668
- 668 : 2 = 334, on réunit les valeurs en deux groupes de 334 données.
- 32 + 115 + 192 = 339, donc la médiane se situe dans la troisième colonne : la médiane est égale à 3km.

Cela signifie qu'on peut créer deux groupes d'élèves d'effectif égal selon qu'ils ont parcouru 3km et moins ou 3km et plus.

En utilisant les effectifs cumulés croissants (ECC) :

On va écrire l'effectifs des données de valeur inférieure ou égale à la colonne : les effectifs vont s'ajouter et dans la dernière colonne on retrouve l'effectif total de la série.

Distance (km)	1	2	3	4	5	6
Effectif	32	115	192	221	85	23
ECC	32	147	339	560	645	668

- On lit que l'effectif total est de 668 participants.
- 668 : 2 = 334, on réunit les valeurs en deux groupes de 334 données.
- On sélectionne la colonne dont l'ECC est le plus proche de cette valeur par excès, c'est la colonne 3 km avec l'ECC égal à 339.

On retrouve la réponse trouvée avec la première méthode : la médiane est à 3 km.

Définition :

L'étendue d'une série est la différence entre la plus petite et la plus grande valeur de cette série.

Exemples :

Dans la série {253 ; 458 ; 347; 325 ; 189}, l'étendue est 458 – 189 = 269

Les données de cette série peuvent donc être éloignée de 269 unités.

UNITÉ F. PROBABILITÉS

I . VOCABULAIRE

1) ÉVÈNEMENT CERTAINS ET IMPOSSIBLES

A. DÉFINITIONS

Définition :

Un évènement est certain si on est sûr qu'il sera réalisé.

Un évènement est impossible s'il ne peut pas être réalisé.

Exemples : dans un lancer de dé équilibré,

- l'évènement "obtenir une face dont la valeur est inférieure à 10" est certain.
  (toutes les issues sont inférieures à 10 : {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 })
- l'évènement "obtenir une face dont la valeur est supérieure à 10" est impossible.

B. PROBABILITÉ

On appel probabilité d'un évènement la fréquence de réalisation de cet évènement pour un très grand nombre d'expériences pour lequel cette fréquence semble se stabiliser.

Propriétés :

La probabilité d'un évènement certain est égale à 1 (c'est-à-dire 100%).

La probabilité d'un évènement impossible est égale à 0.

La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

Exemple :

Soit A : " obtenir un nombre inférieur à 3" en lançant un dé. A est réalisé par les issues {1 ; 2 }.

$$p(A) = p(1) + p(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} \quad \left(=\frac{1}{3}\right)$$

2) ÉVÈNEMENT INCOMPATIBLES

A. DÉFINITION

Définition :

On dit que deux évènements sont incompatibles s'ils n'ont pas d'issues en commun.

Exemple : Dans un tirage de cartes,

les évènement A : "tirer un carreau" et B: "tirer une carte noire" sont incompatibles.

B. PROBABILITÉ

Propriété :

Soit C un évènement constitué des évènements incompatibles A et B alors :

$$p(C)=p(A)+p(B)$$

Exemple :

on cherche la probabilité de l'évènement C : "tirer un carreau, un pique ou un trèfle".

$$p(C) = p(\text{tirer un carreau}) + p(\text{tirer une carte noire}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

3) ÉVÈNEMENTS CONTRAIRES

A. DÉFINITON

Définition :

On dit qu'un évènement est l'évènement contraire de l'évènement A s'il est constitué de l'ensemble de toutes les issues qui ne réalisent pas l'évènement A. On le note "non A".

Exemple :

Soit l'èvenement D : " tirer un coeur",

c'est l'évènement contraire de l'évènement C : "tirer pique,trèfle ou carreau".

B. PROBABILITÉ

Propriété :

Soit A un évènement : $p(non\ A)=1-p(A)$

Exemple :

$$p(\text{tirer un coeur}) = 1 - p(\text{tirer un pique, carreau ou trèfle}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

UNITÉ G. PROPORTIONNALITÉ

I. COEFFICIENT MULTIPLICATEUR

Dans une situation de proportionnalité, on appelle coefficient multiplicateur le nombre par lequel on multiplie les valeurs de la première donnée pour obtenir les valeurs de la seconde. Il peut être exprimé en :

- fraction ;

- valeur décimale ;

- en pourcentage.

Exemples :

- Soit un plan de 45 cm par 60 cm à l'échelle 1:1 000. Le coefficient multiplicateur pour passer de la réalité à la maquette est de $\times\frac{1}{1000}$.
- Soit une cagette de pommes de 13 kg étiquetée à 2,54€ le kilogramme. Le coefficient multiplicateur pour déterminer le prix en fonction de la masse de pommes est $\times 2{,}54$.
- Soit une facture d'un montant hors taxes de 1247€, à laquelle doit être appliquée une TVA (taxe sur la valeur ajoutée) de 20%. Le coefficient multiplicateur pour déterminer le montant de la TVA est $\times\frac{20}{100}$, c'est à dire $\times 0{,}2$.

Dans ces situations, on pourra rapidement passer d'une donnée à l'autre en utilisant le coefficient multiplicateur (attention à en respecter le sens).

II . TAUX D'ÉVOLUTION

On parle de taux d'évolution lorsque les valeurs subissent une augmentation ou une réduction de façon proportionnelle.

Exemple : Lors des soldes, un article à 21€ est soldé à 30% (→ réduction).

Dans ce cas le calcul $\frac{30}{100}\times 21$ ne correspond pas au prix final mais uniquement au montant de la réduction.

- On peut résoudre le problème en ôtant la réduction au prix initial $21-\frac{30}{100}\times 21=14{,}70\,€$
- ou en raisonnant directement par proportionnalité :

Prix initial (en €)	100	21
Prix final réduit (en €)	70	?

Règle de trois :

$$?=\frac{70\times 21}{100}=\frac{70}{100}\times 21=14{,}70\,€$$

Généralisons cette situation : Réduction de taux a sur une valeur x :

$$valeur_{finale\ réduite}=x-a\times x=1\times x-a\times x=(1-a)\times x$$

Propriété : taux d'évolution (réduction de taux a ou augmentation de taux b)

$valeur_{finale\ réduite}=(1-a)\times x$ le coefficient multiplicateur est $c_{réduction}=(1-a)$

$valeur_{finale\ augmentée}=(1+b)\times x$ le coefficient multiplicateur est $c_{augmentation}=(1+b)$

Exemple :

- Une population de 600 habitants **augmente** de 15% :
  le coefficient multiplicateur est $1+\frac{15}{100}=\frac{115}{100}=1{,}15$,
  on calcule $600\times 1{,}15=690$ habitants.
- Une population de 742 âmes **baisse** de 2 habitants sur 7 :
  le coefficient multiplicateur est $1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$,
  on clacule $742\times\frac{5}{7}=530$
- On applique un **taux d'augmentation** de 0,2 (TVA) sur une facture de 1247€ HT :
  le coefficient multiplicateur est $1+0{,}2=1{,}2$,
  on calcule $1247\times 1{,}2=1496{,}40$ € TTC.

III . RATIO

Définition : ratio

On dit que les données x et y sont dans un ratio $a : b$

si on peut écrire l'égalité $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

Exemple :

Dans une classe de 28 élèves, les garçons et les filles sont dans un ratio $3:4$.

On peut le représenter par le schéma suivant où chaque case correspond à un groupe de garçons(G) ou un groupe de filles(F) de même effectif.

G	G	G	F	F	F	F

Chaque case est de même aire et on a bien alors :

$$\frac{effectif\ \ de\ \ garçons}{3} = \frac{effectif\ \ de\ \ filles}{4}$$

Pour déterminer le nombres de filles ou de garçons, il suffit alors de calculer :

- $\frac{28}{7} \times 3 = 12$ garçons où 7 = 3+4 (= a+b).
- $\frac{28}{7} \times 4 = 16$ filles

Remarque :

On retrouve l'égalité intuitive $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ avec les produits en croix.

Dans l'exemple : $\frac{effectif\ \ de\ \ garçons}{effectif\ \ de\ \ filles} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

Par extension :

On dit que les données x ; y et z sont dans un ratio $a : b : c$
si on peut écrire l'égalité $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Exemple 1 :

On construit un triangle de côtés AB, BC et CA dans le ratio 4:9:7. Donc $\frac{AB}{4} = \frac{BC}{9} = \frac{CA}{7}$

Proposez des dimensions possibles pour ce triangle.

- $AB = 4$ *unités de longueur* ; $BC = 9$ *unités de longueur* et $CA = 7$ *unités de longueur*

  Dans ce cas on retrouve $\frac{4}{4} = \frac{9}{9} = \frac{7}{7} = 1$.

- $AB = 8{,}4\ cm$; $BC = 18{,}9\ cm$ et $CA = 14{,}7\ cm$

  Dans ce cas on retrouve $\frac{8{,}4}{4} = \frac{18{,}9}{9} = \frac{14{,}7}{7} = 2{,}1$.

Exemple 2 :

Dans une recette pour 4 personnes on a les ingrédients (en g) : farine, sucre et beurre donnés dans un ratio 150:120:90.

Pour 10 personnes on garde cette proportion en multipliant chaque nombre par 2,5 $\left(=\frac{10}{4}\right)$.

$$\frac{375}{150} = \frac{300}{120} = \frac{225}{90} \mathbf{=} \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{4}}$$

UNITÉ H. FONCTIONS

I . DÉPENDANCE ENTRE DEUX GRANDEURS

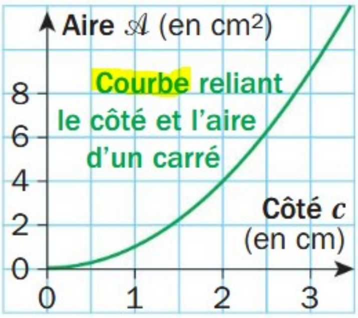
Définition :

Quand deux grandeurs mesurables dépendent l'une de l'autre, on dit que l'une est fonction de l'autre.

On peut alors :

- trouver une expression algébrique qui permet de passer d'une grandeur à l'autre;
- tracer une courbe qui permet de représenter le lien entre ces deux grandeurs ;
- construire un tableau de valeurs qui associe les nombres des deux grandeurs.

EXEMPLE 1 : L'aire $\mathscr{A}$ d'un carré est fonction de la longueur c de son côté selon la relation algébrique $\mathscr{A} = c^2$.



EXEMPLE 2 : Le tableau de valeurs suivant donne la température moyenne à Bordeaux pour chaque mois du 1[er] semestre de l'année 2015.

Mois	1	2	3	4	5	6
T (en °C)	10,1	11,7	15,1	17,3	21,2	24,5

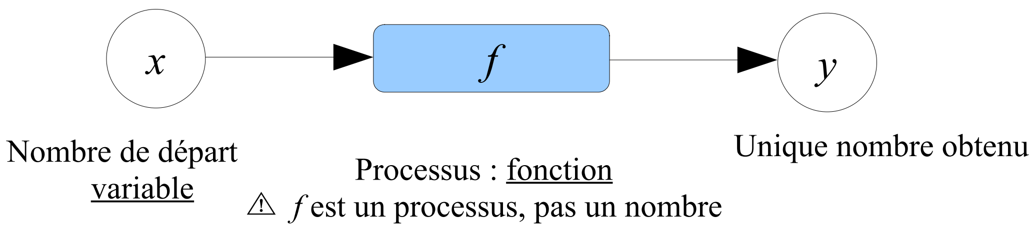
La température dépend du mois considéré, mais on ne connait pas la relation algébrique qui relie ces deux grandeurs.

II . NOTION DE FONCTION

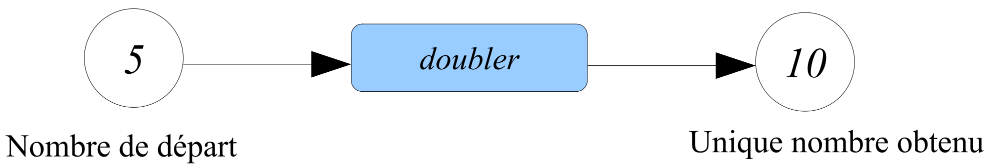
1) DÉFINITION ET NOTATION

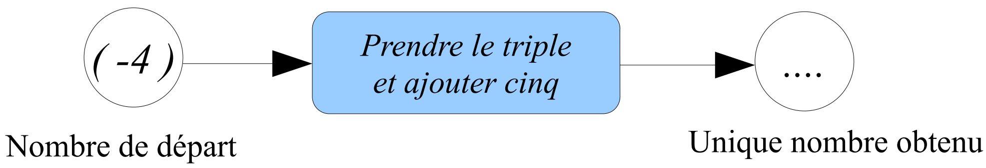
Définition :

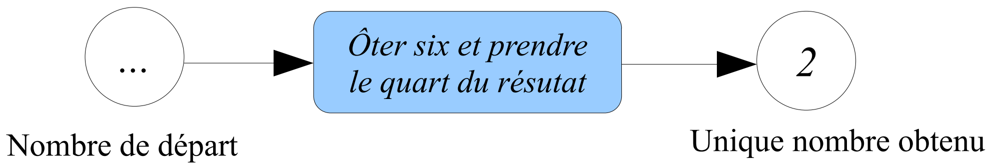
Une fonction est un processus, qui à chaque valeur d'un nombre appelé variable, associe un unique nombre.

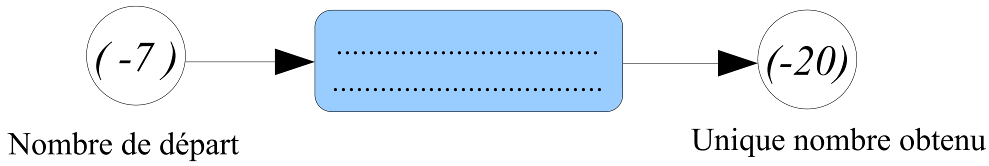


Exemples :

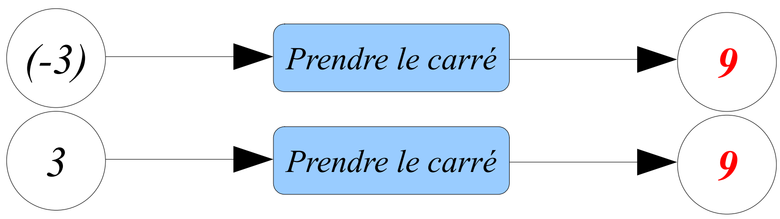






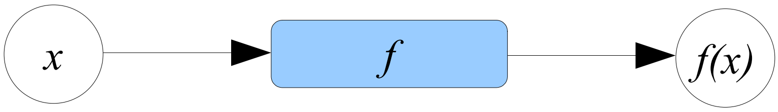


Remarque : Deux nombres différents peuvent donner le même résultat...



Définitions :

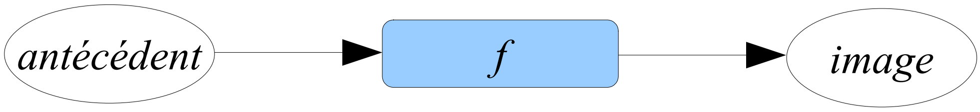
On note



Où x est la variable, f est la fonction et $f(x)$ est le nombre obtenu.

Soit a, b deux nombres, on dit alors :

- le nombre $f(a)$ est l'unique image de a par la fonction f .
- Le nombre b est un antécédent de $f(b)$.



2) REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION PAR UN TABLEAU DE VALEURS

Dans un tableau de valeurs, la première ligne contient la variable et la seconde ligne contient son image par la fonction.

x	-5	-1	0	2	3	6
$f(x)$	1	3	-5	6	-5	-5

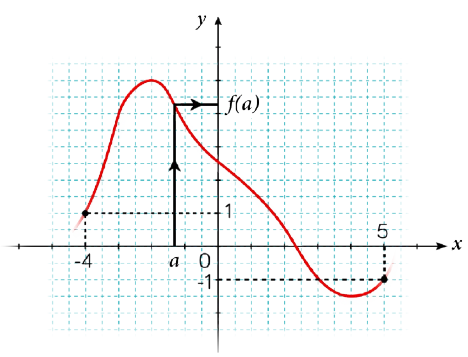
L'unique image de 0 est -5 .

6 a pour antécédent 2 .

(-5) a pour antécédents 0 et 6 .

3) REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION PAR UNE COURBE

Dans une courbe, la variable est représentée en abscisse et l'image par la fonction est représentée en ordonnée.



(- 4) a pour unique image 1 .

5 a pour antécédent -2 .

(- 1) a pour antécédents 3 et 5 .

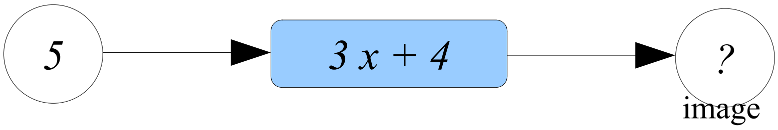
4) NOTATION ALGÉBRIQUE DES FONCTIONS

L'utilisation de l'écriture algébrique de la fonction permettra de raisonner par le calcul.

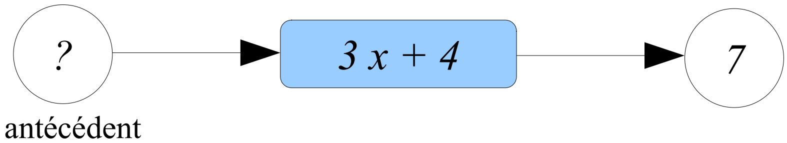
> On dira que f est la fonction qui à x associe $7x^2+9x-5$ (par exemple)
>
> Et on notera : $f : x \longmapsto 7x^2+9x-5$

Exemples : Soit la fonction $g : x \longmapsto 3x+4$

- L'image de 5 par g est 19 .
  En effet : $g(5) = 3 \times 5 + 4 = 19$



- Un antécédent de 7 par g est 1.
  En effet : $g(1) = 3 \times 1 + 4 = 7$



Remarque : Soit la fonction $h : x \longmapsto x^2$

- Le nombre 9 admet 3 et (-3) comme antécédents par la fonction h.

En effet : $h(3) = 3^2 = 9$

mais aussi

$h((-3)) = (-3)^2 = 9$

- Le nombre (-9) n'a pas d'antécédent par la fonction h , en effet le carré d'un nombre est toujours positif !

Remarque :

- Pour obtenir une image grâce à la forme algébrique, il suffit de substituer une valeur à la variable.

Ex : soit la fonction f qui à x associe $3x+12$.

On cherche l'image de (-7).

On calcule $f((-7)) = 3 \times (-7) + 12 = -9$

Donc l'image de (-7) par la fonction f est (-9).

- Pour obtenir les antécédents grâce à la forme algébrique, il faut savoir résoudre une équation.

Ex : soit la fonction f qui à x associe $3x+12$.

On cherche les antécédents de 5.

On a $f(x) = 5$ donc :

$$3x + 12 = 5$$
$$3x = -7$$
$$x = \frac{-7}{3}$$

Donc 5 a un unique antécédent par la fonction f : c'est $\frac{-7}{3}$.

III . FONCTIONS LINÉAIRES

1) FORME ALGÉBRIQUE DES FONCTIONS LINÉAIRES

Définition :

f est une fonction linéaire s'il existe un nombre a non nul tel que :

pour tout nombre x on ait $\boxed{f(x) = ax}$.

Dans ce cas, le nombre a est appelé le coefficient de la fonction linéaire f .

Exemples : Déterminez si les fonctions suivantes sont des fonctions linéaires, si oui donner leur coefficient.

- $h_1 : x \longmapsto 5x$, c'est une fonction linéaire de coefficient 5.
- $h_2 : x \longmapsto -98x$, c'est une fonction linéaire de coefficient (-98).
- $h_3 : x \longmapsto \frac{6}{7}x$, c'est une fonction linéaire de coefficient $\frac{6}{7}$.
- $h_4 : x \longmapsto \frac{x}{2}$, c'est une fonction linéaire de coefficient $\frac{1}{2}$.
- $g_1 : x \longmapsto x^2$, ce n'est pas une fonction linéaire !

Remarque : pour toute fonction linéaire f , $\boxed{f(0)=0}$.

A. IMAGE D'UNE FONCTION LINÉAIRE

Si f est une fonction linéaire de coefficient (-3), on peut déterminer l'image de n'importe quel nombre. Calculons les images de (-6), 0 et $\frac{7}{11}$.

- Pour tout nombre x on a $f(x) = (-3) \times x$
- $f(-6) = (-3) \times (-6) = 18$ donc 18 est l'image de -6 par la fonction f .
- $f(0) = (-3) \times 0 = 0$ donc $f : 0 \longmapsto 0$
- $f\left(\frac{7}{11}\right) = (-3) \times \left(\frac{7}{11}\right) = \left(\frac{-21}{11}\right)$ donc $f : \frac{7}{11} \longmapsto \frac{-21}{11}$

Remarque : On calcule l'image d'un nombre par une fonction linéaire donnée avec la formule

$$\boxed{f(x) = a \times x}$$

B. ANTÉCÉDENTS D'UNE FONCTION LINÉAIRE

Si f est une fonction linéaire de coefficient 6, on peut déterminer l'antécédent de n'importe quel nombre. Calculons les antécédents de (- 5), 0 et $\frac{4}{7}$.

- Pour tout nombre x on a $f(x) = 6 \times x$
- $f(x_1) = 6 \times x_1 = -5$ d'où $x_1 = -5 : 6 = \frac{-5}{6}$ donc $\frac{-5}{6}$ est l'antécédent de -5.
- $f(x_2) = 6 \times x_2 = 0$ d'où $x_2 = 0 : 6 = 0$ donc $f : 0 \longmapsto 0$
- $f(x_3) = 6 \times x_3 = \frac{4}{7}$ d'où $x_3 = \frac{4}{7} : 6 = \frac{2}{21}$ donc $f : \frac{2}{21} \longmapsto \frac{4}{7}$

Remarque : Tout nombre a un unique antécédent par une fonction linéaire donnée.

On le calcule par la formule $\boxed{x = \frac{f(x)}{a}}$

C. COEFFICIENT D'UNE FONCTION LINÉAIRE

Si f est une fonction linéaire telle que l'image de 4 est (-18), on peut déterminer son coefficient de linéarité.

- f est une fonction linéaire donc il existe un nombre a tel que $f(x) = a \times x$.
- Pour $x = 4$ on a $f(4) = (-18)$.

-> Donc $a \times 4 = -18$

Il suffit alors de résoudre l'équation : $a = -\frac{18}{4}$

Propriété :

Soit f une fonction linéaire de coefficient a , pour x non nul on a $\boxed{a = \frac{f(x)}{x}}$.

2) REPRÉSENTATIONS DES FONCTIONS LINÉAIRES

Les tableaux de valeur des fonctions linéaires sont de la forme suivante :

x	..	0	..	..
$f(x)$	..	0	..	..

$\times a$

Propriété :

Toute situation de proportionnalité peut être modélisée par une fonction linéaire.

Le coefficient de proportionnalité sera alors le coefficient de la fonction linéaire.

Propriété :

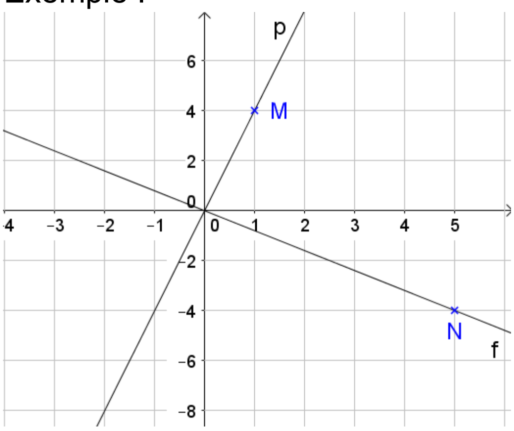
Toute fonction linéaire est représentée dans un repère orthogonal par une droite passant par l'origine du repère.

En effet soit le point A d'abscisse 0. On a $f(0)=0$ donc A a pour coordonnées $(0;0)$. La représentation passe par l'origine du repère.

Remarque : Quelque soit le point $M(x;y)$ de la droite représentative d'une fonction linéaire (distinct de l'origine), on peut déterminer le coefficient de la fonction linéaire :

$$\boxed{\text{si } M(x;y) \in C_f \text{ alors } a = \frac{y}{x}}$$

Exemple :



- $M(1;4)$ appartient à la droite p .
  Donc $a_p = \frac{y_M}{x_M} = \frac{4}{1} = 4$.
  Le coefficient de la fonction linéaire p est 4.
  Coefficient positif ↗ .

- $N(5;-4)$ appartient à la droite f .
  Donc $a_p = \frac{y_N}{x_N} = \frac{-4}{5} = -0{,}8$.
  Le coefficient de la fonction linéaire f est -0,8.
  Coefficient négatif ↘ .

3) MODÉLISATION DE SITUATIONS DE PROPORTIONNALITÉ PAR DES FONCTIONS LINÉAIRES.

Soit une situation de proportionnalité entre une deux grandeurs dont les valeurs sont notées x et y. Alors il existe un nombre a tel que $y = a \times x$ et a est le coefficient de proportionnalité.

La relation entre x et y peut donc être modélisé par la fonction linéaire f telle que $f(x) = a \times x$.

Exemples :

- Un plan est tracé avec une échelle de 1 dix-millième. Si x est la distance réelle, la distance sur le plan est représentée par la fonction linéaire :

$$f(x) = \frac{1}{10\,000} \times x = 0{,}0001\,x$$

- Soit une augmentation de 15% des prix d'une boutique. Si x est le prix initial, le prix final est modélisé par la fonction linéaire :

$$g(x) = \left(1 + \frac{15}{100}\right) \times x = 1{,}15\,x$$

- Soit une diminution de 10% de la consommation d'un véhicule. Si x est la consommation initiale, la nouvelle consommation est modélisée par la fonction linéaire :

$$h(x) = \left(1 - \frac{10}{100}\right) \times x = 0{,}9\,x$$

IV . FONCTIONS AFFINES

1) FORME ALGÉBRIQUE DES FONCTIONS AFFINES

Définition :

Une fonction f est une fonction affine s'il existe deux nombres a et b tels que :

pour tout nombre x , $\boxed{f(x) = a\ x + b}$

Vocabulaire : $f : x \longmapsto ax+b$ est une fonction affine

- de coefficient directeur a
- et d'ordonnée à l'origine b .

Exemple :

- $h_1 : x \longmapsto -3\ x + 7$ est une fonction affine avec $a=-3$ et $b=7$.

- $h_2 : x \longmapsto x - \frac{4}{5}$ est une fonction affine avec $a=1$ et $b=\frac{-4}{5}$

  car $x - \frac{4}{5} = 1x + \left(\frac{-4}{5}\right) = ax + b$

- $h_3 : x \longmapsto 1 - x$ est une fonction affine avec $a=-1$ et $b=1$

  car $1 - x = -1x + 1 = ax + b$

Cas particuliers :

- Si $b=0$, alors $f(x) = ax$.

  f est une fonction linéaire de coefficient a .

- Si $a=0$, alors $f(x) = b$.

  f est une fonction constante, tout nombre x a pour image le nombre b .

A. IMAGE D'UN NOMBRE PAR UNE FONTION AFFINE.

Soit f une fonction affine de coefficient directeur 5 et d'ordonnée à l'origine 9.

Cherchons l'**image** de 7.

- forme algébrique : $f(x) = 5x + 9$
- **calcul** : $f(7) = 5 \times 7 + 9 = 44$
- donc l'image de 7 par la fonction f est 44.

B. ANTÉCÉDENT D'UN NOMBRE PAR UNE FONTION AFFINE.

Soit f une fonction affine de coefficient directeur -3 et d'ordonnée à l'origine 2.

Cherchons l'**antécédent** de 1 .

- forme algébrique : $f(x) = -3x + 2$
- **équation** à résoudre : $f(x) = -3x + 2 = 1$

$$-3x + 2 = 1$$

$$-3x = -1$$

$$x = \frac{-1}{-3}$$

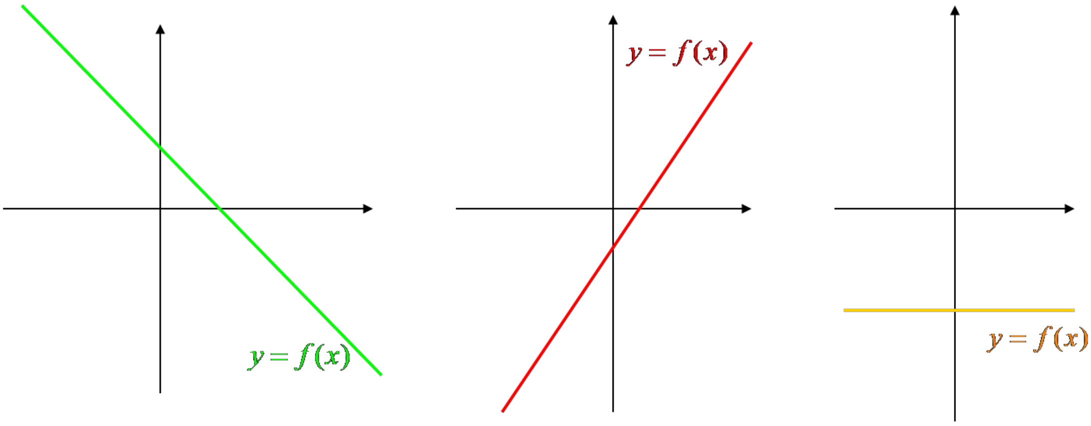
$$x = \frac{1}{3}$$

- donc l'antécédent de 1 par la fonction f est $\frac{1}{3}$.

2) REPRÉSENTATIONS DE FONCTION AFFINES

Propriété :

Dans un repère, la représentation d'une fonction affine est une droite.



$f(x)=ax+b$ avec $a<0$	$f(x)=ax+b$ avec $a>0$	$f(x)=ax+b$ avec $a=0$
Fonction affine décroissante	Fonction affine croissante	Fonction affine constante

Grâce aux coordonnées de deux points de la droite $M(x_1;y_1)$ et $N(x_2;y_2)$, on retrouve alors :

- l'ordonnée à l'origine par lecture graphique ;
- et le coefficient directeur à l'aide de la formule $\boxed{a = \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}}$ ♥.

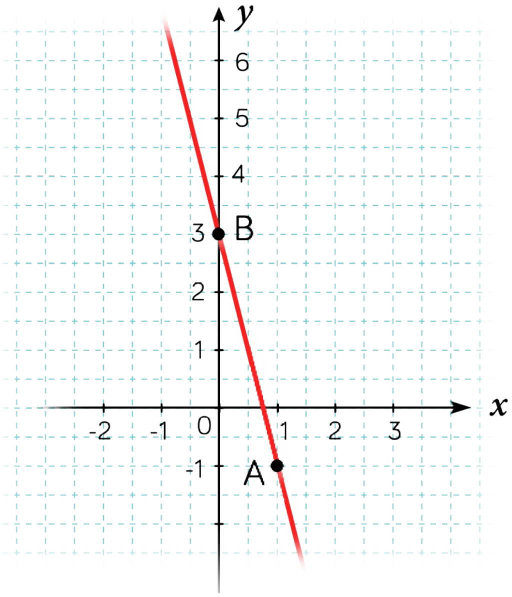
Démonstration : (à comprendre mais pas à apprendre !)

démontrons la formule du coefficient directeur d'une fonction affine $f : x \longmapsto ax+b$.

- $M\ (x_1\ ;\ y_1) \in C_f$ donc $y_1 = a\ x_1 + b$
- $N\ (x_2\ ;\ y_2) \in C_f$ donc $y_2 = a\ x_2 + b$

Appliquons la formule :

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{(ax_1+b)-(ax_2+b)}{x_1-x_2} = \frac{ax_1+b-ax_2-b}{x_1-x_2} = \frac{ax_1-ax_2}{x_1-x_2} = \frac{a(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = a$$ CQFD



Exemple d'application :

Déterminer l'expression algébrique de la fonction représentée dans le repère ci contre.

- C'est une fonction affine car c'est une droite.
- L'ordonnée à l'origine est 3 ($\boxed{b=3}$) car la droite passe par le point $B(0;3)$.
- A(1;-1) et B(0;3) appartiennent à la droite donc $\boxed{a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-1-3}{1-0} = -4}$
- On en déduit que : $\boxed{f(x) = -4x+3}$

UNITÉ I. GRANDEURS MESURABLES

I . RAPPELS : VOCABULAIRE

Définition :

Une grandeur est une caractéristique qui se mesure ou se calcule;

une mesure est un nombre qui permet d'exprimer une grandeur, cette mesure est définie avec une unité de mesure.

- un périmètre s'exprime avec une unité de longueur (cm, m, lieue, pouce, année-lumière ...)
- une aire (cm^2, m^2, are ...)
- un volume (cm^3, m^3, L ...)
- une durée (s, min, h ...)
- une température (°C, °F, K ...)
- une masse (g, kg, t ...)
- une puissance (W, kW ...)

Pour changer d'unité de mesure, il faut savoir convertir les mesures d'une grandeur donnée.

A savoir :

* 1 m = 100 cm	* 1km = 1 000 m	
* 1 m^2 = 100 dm^2	* 1 km^2 = 1 000 000 m^2	
* 1 m^3 = 1000 dm^3	* 1dm^3 = 1 L	
* 1h = 60 min	* 1 min = 60 s	* 1 h = 3 600 s

II . GRANDEURS COMPOSÉES

1) GRANDEURS PRODUITS

Définition :

On appelle grandeur produit, une grandeur issue du produit de deux grandeurs.

Exemple :

$$E = P \times t$$

L'énergie est une grandeur produit : on l'obtient en calculant le produit de la puissance par la durée.

Si on étudie les unités de mesure possible, on obtient des kilowatts mulitpliés par des heures, donc des kilowattheure.

$$E = [kW] \times [h] = [kW\ .\ h]$$

2) GRANDEURS QUOTIENTS

Définition :

On appelle grandeur quotient, une grandeur issue du quotient de deux grandeurs.

Exemple :

$$v = \frac{d}{t}$$

La vitesse est une grandeur quotient : on l'obtient en calculant le quotient de la distance par la durée.

Si on étudie les unités de mesure possible, on obtient des kilomètres divisés par des heures, donc des kilomètres par heure.

$$d = \frac{[km]}{[h]} = [km/h]$$

remarque :

Si une grandeur quotient est obtenue par le quotient de deux grandeurs de même unité de mesure, la grandeur obtenue n'aura pas d'unité de mesure.

Exemple : l'échelle. Sur une carte 1 cm représente 10 m.

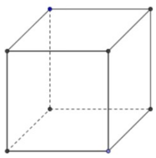
On fait concorder les unités de mesure car nous avons deux longueurs en jeu.

$$Echelle = \frac{1\ \ cm}{10\ \ m} = \frac{1\ \ cm}{1\ \ 000\ \ cm} = \frac{1}{1\ \ 000}$$ [sans unité de mesure]

UNITÉ J. CAS PARTICULIER DES GRANDEURS GÉOMÉTRIQUES

I. VOLUMES DE SOLIDES

Cube

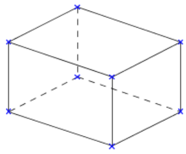


$V_{cube} = c \times c \times c$

$V_{cube} = c^3$

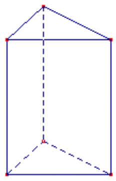
Pavé droit

parallélépipède rectangle



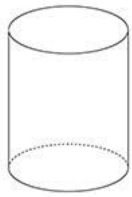
$V_{pavé} = l \times L \times h$

Prisme droit



$V_{prisme} = A_{base} \times h$

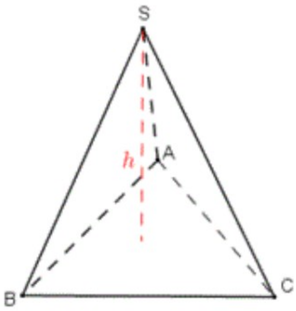
Cylindre



$V_{cylindre} = A_{base} \times h$

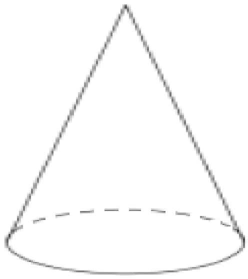
$V_{cylindre} = (\pi \times r^2) \times h$

Pyramide



$$V_{pyramide} = \frac{A_{base} \times h}{3}$$

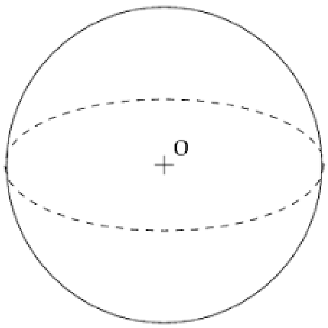
Cône



$$V_{cône} = \frac{A_{base} \times h}{3}$$

$$V_{cône} = \frac{(\pi \times r^2) \times h}{3}$$

Boule



$$V_{boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$$

Remarque : $A_{sphère} = 4 \times \pi \times r^2$

UNITÉ K. OBJETS DU PLAN ET DE L'ESPACE

I . SOLIDES

1) DÉFINITION

Définition : Polyèdre

Un polyèdre est un solide dont les faces sont toutes des polygones.

Les cubes, parallélépipèdes rectangles, prismes droits et pyramides sont des polyèdres.

Les cylindres, cônes et boules ne sont pas des polyèdres.

Remarque :

On appelle boule le solide constitué de l'ensemble des points dont la distance au centre est inférieure ou égale au rayon.

On appelle sphère l'ensemble des points dont la distance au centre est égale au rayon.

Boule → solide plein

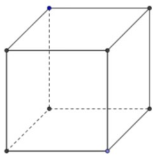
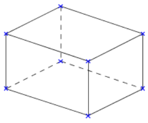
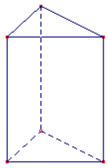
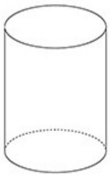
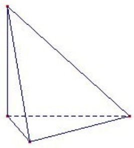
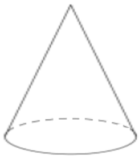
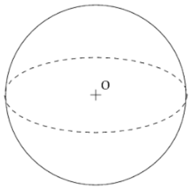
Sphère → enveloppe du solide

Remarque :

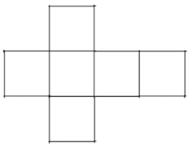
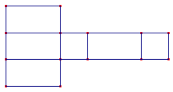
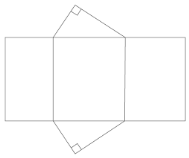
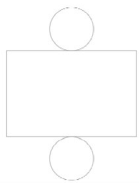
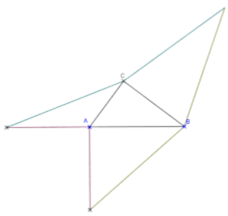
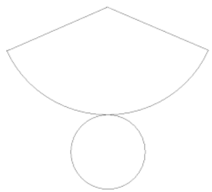
La pyramide à base triangulaire est aussi appelée tétraèdre.

2) REPRÉSENTATIONS

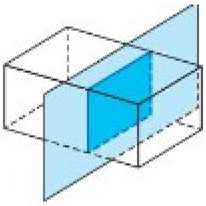
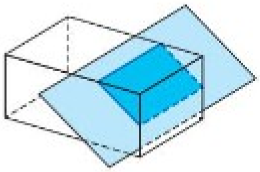
A. VUE EN PERSPECTIVE

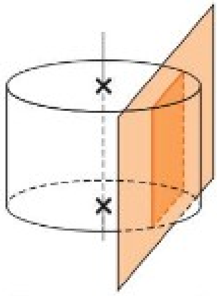
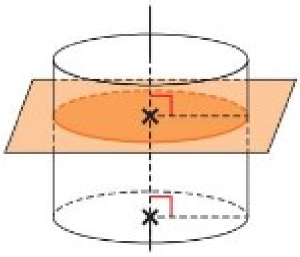
Cube	Pavé droit parallélépipède rectangle	Prisme droit	Cylindre
			
Pyramide			Cône
			
			Boule
			

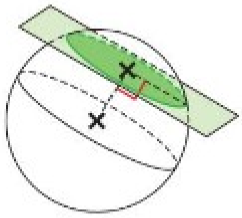
B. PATRONS

Cube	Pavé droit parallélépipède rectangle	Prisme droit	Cylindre
			
Pyramide			Cône
			
			Boule
			Pas de patron

3) SECTIONS DE SOLIDES

Propriété : La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face ou à une arête est un rectangle.	 

Propriété : La section d'un cylindre : par un plan parallèle à son axe est un rectangle; par un plan parallèle à sa base est un disque.	 

Propriété : La section d'une boule par un plan est un disque.	

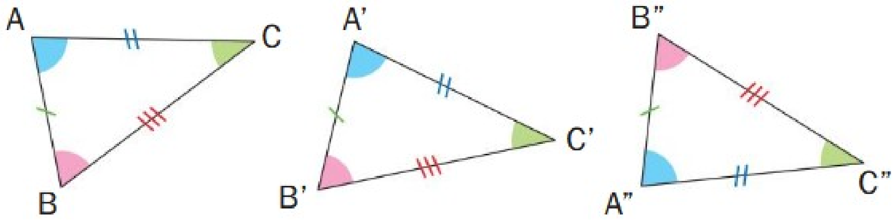
II . TRIANGLES SEMBLABLES OU ÉGAUX

1) TRIANGLES ÉGAUX

Définition :

Deux triangles sont égaux si leurs côtés sont respectivement de la même longueur.

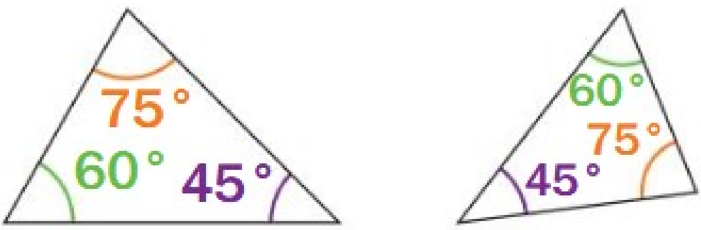
Exemple : les triangles ABC, A'B'C' et A"B"C" sont égaux.



Propriété :

Si des triangles sont égaux, alors ils sont superposables et leurs angles ont la même mesure.

Remarque : deux triangles peuvent avoir des angles de même mesure sans être égaux !

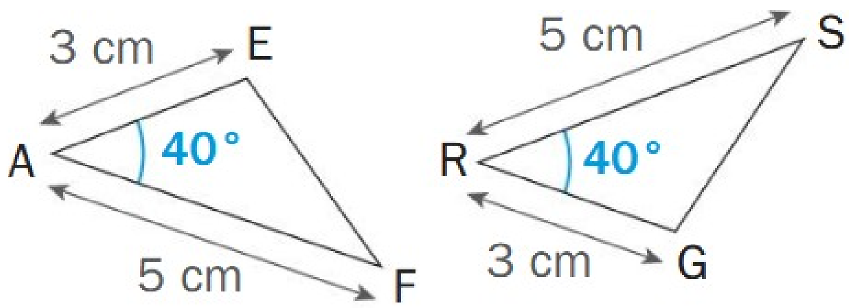


ces deux triangles ne sont pas égaux

Propriété :

Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés respectivement de même longueur, alors ces triangles sont égaux.

Exemple :

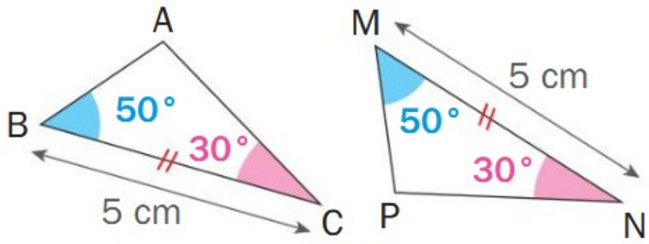


ces triangles sont égaux

Propriété :

Si deux triangles ont un côté de même longueur compris entre deux angles respectivement de même mesure, alors ils sont égaux.

Exemple :



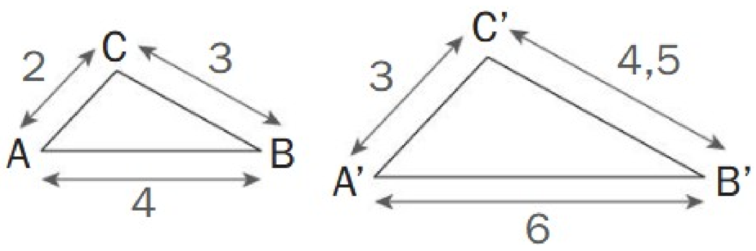
ces triangles sont égaux

2) TRIANGLES SEMBLABLES

Définition :

On dit que deux triangles sont semblables lorsque leurs côtés ont des longueurs proportionnelles.

Exemple :



	Petit côté	Moyen côté	Grand côté
Longueurs des côtés de ABC	AC = 2	CB = 3	AB = 4
Longueurs des côtés de A'B'C'	A'C' = 3	C'B' = 4,5	A'B' = 6

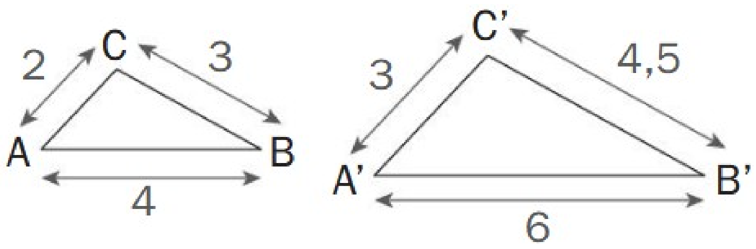
On reconnaît un tableau de proportionnalité de rapport 1,5, donc ces triangles sont semblables.

Avec l'égalité de rapports suivant : $\boxed{\frac{A'C'}{AC} = \frac{C'B'}{CB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{3}{2}}$

Propriété (sens direct) :

Si deux triangles sont semblables, alors les angles de l'un ont la même mesure que les angles de l'autre.

Exemple :



ABC et A'B'C' sont semblables donc $\widehat{ABC}=\widehat{A'B'C'}$;

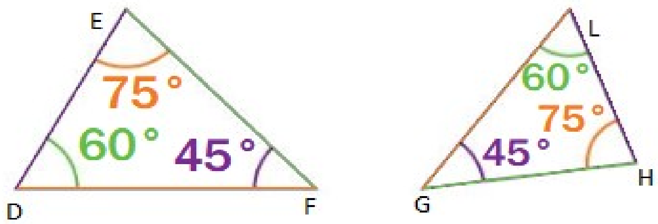
$\widehat{CAB}=\widehat{C'A'B'}$;

$\widehat{BCA}=\widehat{B'C'A'}$

Propriété (sens indirect):

Si un triangle a les angles de même mesure que les angles d'un autre triangle, alors ces triangles sont semblables.

Exemple :



Ces deux triangles ont les angles de mêmes mesures, donc ils sont semblables.

On en conclut l'égalité des rapports de longeurs.

$$\frac{DF}{GL}=\frac{EF}{GH}=\frac{DE}{LH}$$

III . TRANSFORMATIONS DU PLAN : ISOMÉTRIES

Définition :

On appelle isométrie une transformation géométrique qui conserve les mesures.

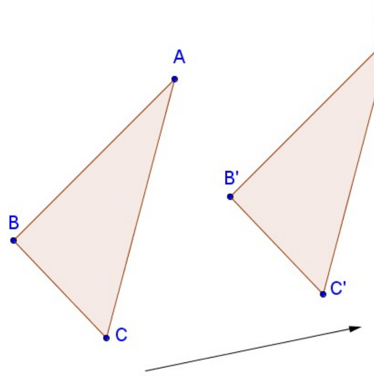
Parmi les transformations du plan, les isométries sont :

- la symétrie axiale ;
- la symétrie centrale ;
- la translation ;
- la rotation.

Définition :

Une translation est une transformation définie par une direction (droite), un sens (flèche) et une longueur (mesure).

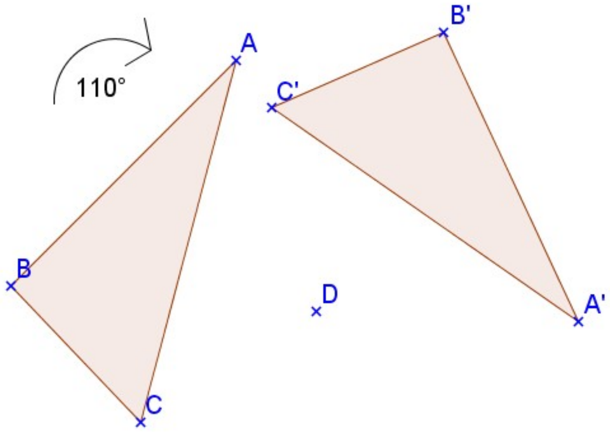
"l'objet glisse le long d'une droite"



Définition :

Une rotation est une transformation définie par une origine (point), un sens (flèche horaire ou anti-horaire) et un angle (mesure).

"l'objet tourne autour d'un point"



IV . TRANSFORMATIONS DU PLAN : HOMOTHÉTIES

1) DÉFINITION

http://www.jaicompris.com/lycee/math/transformation/homothetie/homothetie-college.php

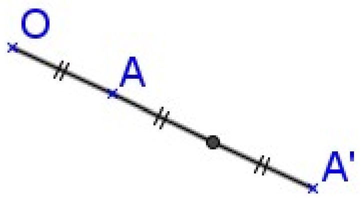
Définition :

Une homothétie de rapport k permet d'agrandir ou de réduire une figure à partir d'un point choisi comme centre dans le rapport k si $k>0$ ou dans le rapport $-k$ si $k<0$.

- Si $-1<k<1$: c'est une réduction
- si $k>1$ ou $k<-1$: c'est un agrandissement
- si $k=-1$: c'est une symétrie centrale
- si $k=1$: il n'y a pas de transformation

Image d'un point avec $k>0$

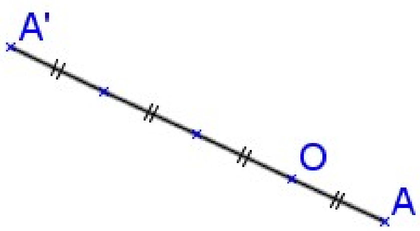
Dire que le point A' est l'image du point A
par l'homothétie de centre O et de rapport 3 signifie que :



- O, A et A' sont alignés
- $OA'=3\ OA$
- A et A' sont du même côté par rapport à O.

Image d'un point avec $k<0$

Dire que le point A' est l'image du point A
par l'homothétie de centre O et de rapport (-3) signifie que :



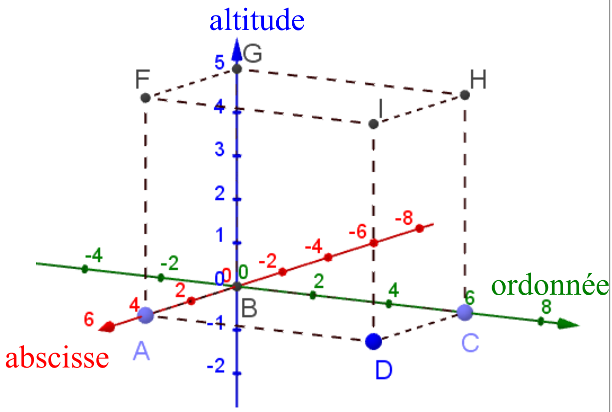
- O, A et A' sont alignés
- $OA'=3\ OA$
- A et A' sont de part et d'autre de O.

V . REPÉRAGE DANS L'ESPACE

1) REPÉRAGE DANS UN PAVÉ DROIT : COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Pour se repérer dans un pavé droit, on utilise trois coordonnées :

- l'abscisse,
- l'ordonnée
- et l'altitude (ou cote).

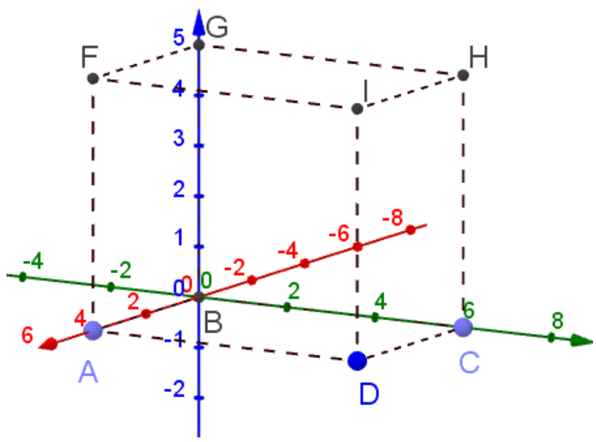


Recherchons les coordonnées cartésiennes du point I :

- I a pour abscisse 4;
- I a pour ordonnée 6 ;
- I a pour altitude 5.

On note I (4 ; 6 ; 5)

♥ ordre : (abscisse ; ordonnée ; altitude)



2) REPÉRAGE SUR UNE SPHÈRE : COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES

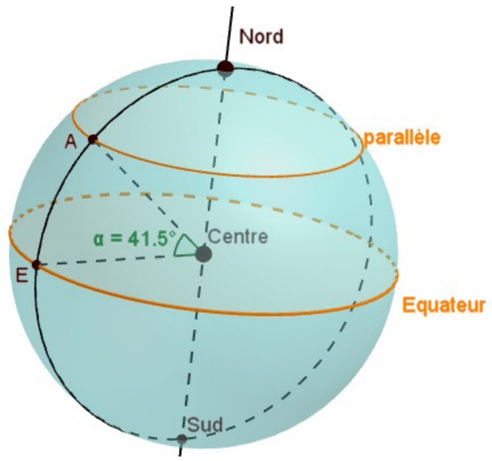
Si on assimile la Terre à une sphère, on peut repérer un point grâce à ses coordonnées géographiques : sa latitude et sa longitude, qui sont des mesure d'angles.

Vidéo Yvan Monka

Pour cela, on modélise la Terre par une sphère d'axe Nord-Sud.

On appelle **parallèles** les cercles de cette sphère qui sont orthogonaux à cet axe.

Le parallèle de référence étant **l'Équateur** : ses points ont pour latitude 0°.



La latitude d'un point peut varier de 90° Sud à 90° Nord.

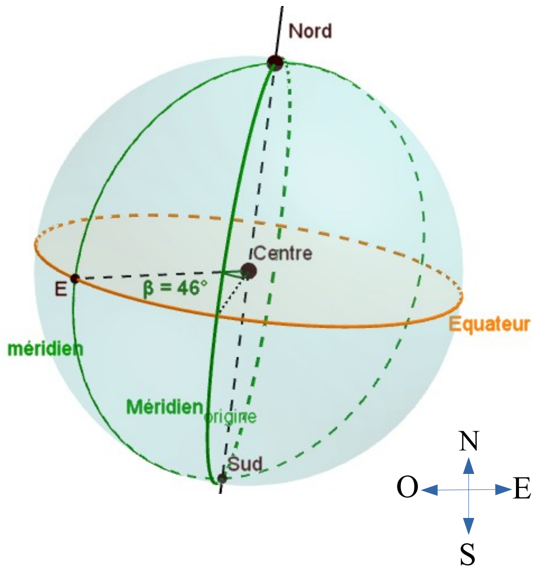
(on note aussi de latitude -90° à latitude +90°).

Latitude du point A :

A est placé sur le parallèle de latitude 41,5° Nord (il est dans l'hémisphère Nord).

On appelle **méridiens** les cercles de cette sphère passant par le Pôle Nord et le Pôle Sud.

Le méridien de référence est le **méridien de Greenwich** : ses points ont pour longitude 0°.



La longitude peut varier de 180° Ouest à 180° Est.

(on note aussi de longitude -180° à longitude +180°)

Longitude du point E :
E est placé sur le méridien de longitude 46° Ouest.

Remarques :

- les méridiens ont tous le même rayon et ont pour centre le centre de la Terre ;
- les parallèles ont des rayons variables : leur rayon augmente en s'éloignant des pôles et en s'approchant de l'Équateur. Leurs centres sont les points de l'axe Nord-Sud.
- Tout point de la sphère est à équidistance du centre de la sphère…

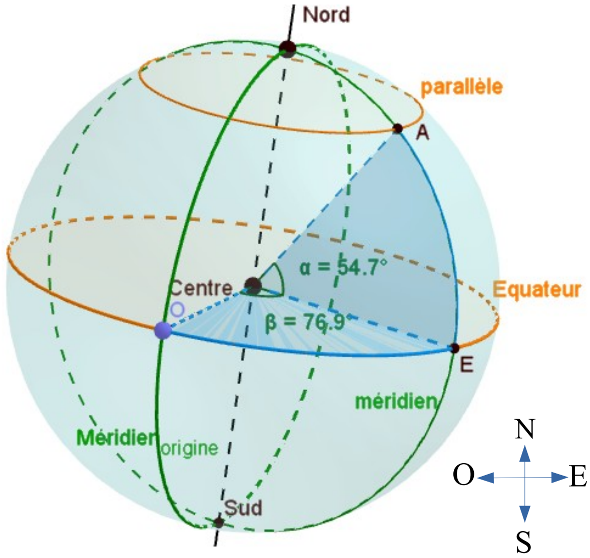
Recherchons les coordonnées géographiques du point A :

- A est situé sur le parallèle de latitude 54,7°N
- A est situé sur le méridien de longitude 76,9°E

On note A (54,7°N ; 76,9°E)

ou aussi A (+54,7° ; +76,9°)

♥ ordre : (latitude ; longitude)



UNITÉ L. CALCULS DE LONGUEURS EN GÉOMÉTRIE

I . TRIGONOMÉTRIE DANS LES TRIANGLES RECTANGLES

Remarque :

Tout triangle rectangle comporte un angle droit et deux angles aigus. Il suffit que deux triangles rectangles aient un angle aigu de même mesure pour être semblables. Leurs dimensions sont alors proportionnelles.

Par conséquent, pour un angle aigu donné, le rapport entre deux longueurs de côtés d'un triangle rectangle est fixe.

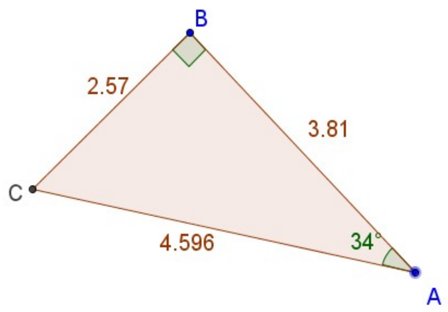


Illustration 1

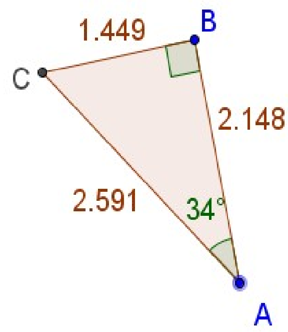


Illustration 2

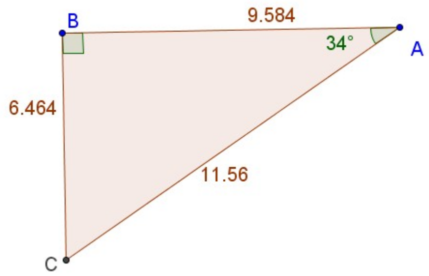


Illustration 3

illustration	(1)	(2)	(3)
AC	4,596	2,591	11,56
AB	3,81	2,148	9,584
$\frac{AB}{AC}$	0,829	0,829	0,829

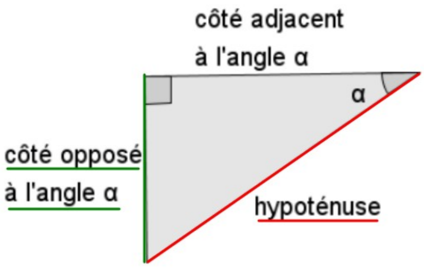
× 0,829

On étudie trois rapports entre les dimensions des côtés du triangle rectangle : ce sont les relations *trigonométriques* (du grec τρίγωνος / trígonos, « triangulaire », et μέτρον / métron, « mesure ») .

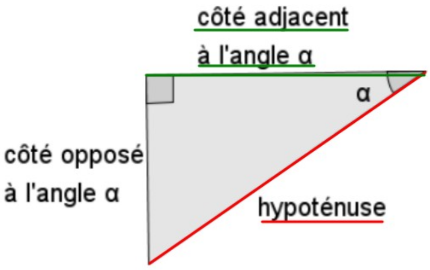
On définit trois fonctions permettant d'exprimer ces rapports en fonction de la mesure d'un des angles aigus du triangle :

- fonction cosinus ;
- fonction sinus ;
- fonction tangente.

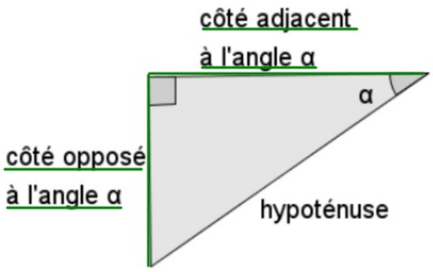
1) RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES



$$\sin(\alpha)=\frac{\textit{côté opposé}}{\textit{hypoténuse}}$$



$$\cos(\alpha)=\frac{\textit{côté adjacent}}{\textit{hypoténuse}}$$



$$\tan(\alpha)=\frac{\textit{côté opposé}}{\textit{côté adjacent}}$$

Propriété :

Les fonctions cosinus et sinus donnent toujours des valeurs comprises entre 0 et 1 pour les angles aigus des triangles rectangles.

Remarque :

La fonction tangente varie de 0 à l'infini pour les angles aigus de triangles rectangles.

Pour apprendre plus vite les formules à savoir par coeur :

$$\mathbf{S}\text{in}(\alpha)=\frac{\mathbf{O}\textit{pposé}}{\mathbf{H}\textit{ypothénuse}}$$

$$\mathbf{C}\text{os}(\alpha)=\frac{\mathbf{A}\textit{djacent}}{\mathbf{H}\textit{ypothénuse}}$$

$$\mathbf{T}\text{an}(\alpha)=\frac{\mathbf{O}}{\mathbf{A}\textit{djacent}}$$

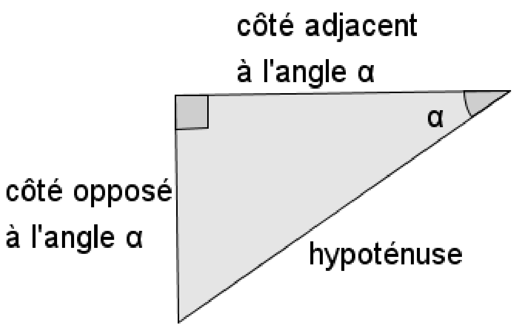
SOH - CAH - TOA

2) ÉTUDE DU COSINUS D'UN ANGLE DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

A. DÉFINITIONS

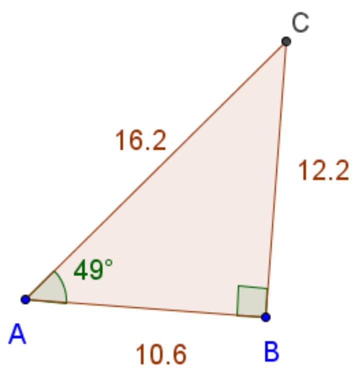
Définition :

Le cosinus d'un angle donne le rapport entre la longueur du côté adjacent et la longueur l'hypoténuse dans un triangle rectangle.



$$\cos(\alpha) = \frac{\textit{côté adjacent à } \alpha}{\textit{hypoténuse}}$$

Exemple :



Avec les lettres :

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{AB}{AC}$$

Avec les valeurs :

$$\cos(49°) = \frac{10{,}6}{16{,}2}$$

Remarque : La valeur du cosinus étant fixe pour un angle donné, on peut la calculer à la calculatrice !

$\cos(49°) \simeq 0{,}656$ est bien égal au calcul du rapport $\frac{10{,}6}{16{,}2} \simeq 0{,}654$

(aux approximations de mesure près, on arrondira le cosinus au millième près).

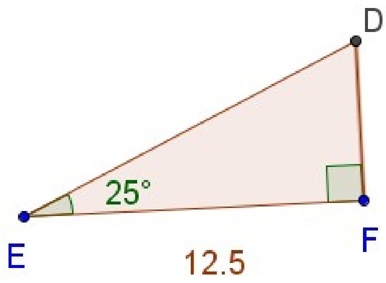
Remarque : La valeur du cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle est toujours comprise entre 0 et 1. En effet, ce rapport provient du quotient par l'hypoténuse (qui est le plus long côté).

B. APPLICATION À LA DÉTERMINATION D'UNE LONGUEUR

- Pour calculer la longueur de l'hypoténuse dans un triangle rectangle :

-> on doit connaître la mesure d'un angle aigu

-> on doit connaître la longueur du côté adjacent à l'angle aigu.



Astuce : $\frac{\cos(25°)}{1} = \frac{12,5}{ED}$

Donc : $ED = \frac{1 \times 12,5}{\cos(25°)}$

Rédaction :

Le triangle FDE est rectangle en F, on peut utiliser les relations trigonométriques.

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}}$$

$$\cos(\widehat{FED}) = \frac{EF}{ED}$$

$$\cos(25°) = \frac{12,5}{ED}$$

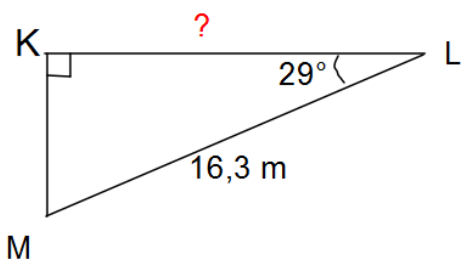
Donc : $ED = \frac{12,5}{\cos(25°)}$

$\boxed{ED = \frac{12,5}{\cos(25°)} \simeq 13,8 \text{ unités de longueur}}$ *La longueur obtenue est plausible, l'hypoténuse est le plus long côté.*

- Pour calculer la longueur d'un côté de l'angle droit dans un triangle rectangle :

-> on doit connaître la longueur de l'hypoténuse ;

-> on doit connaître la mesure de l'angle aigu auquel ce côté est adjacent.



Astuce : $\frac{\cos(\widehat{KLM})}{1} = \frac{KL}{LM}$

Donc : $KL = \frac{LM \times \cos(\widehat{FED})}{1}$

Rédaction :

Le triangle KLM est rectangle en K, on peut utiliser les relations trigonométriques :

$$\cos(\widehat{KLM}) = \frac{KL}{LM}$$

Donc $KL = LM \times \cos(\widehat{FED})$

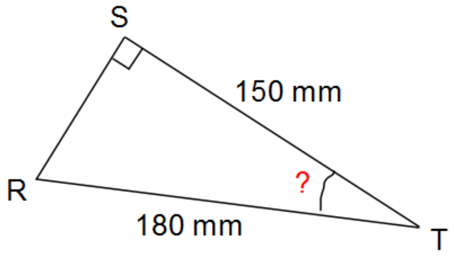
$$\boxed{KL = 16,3 \times \cos(29°) \simeq 14,3\,m}$$

La longueur obtenue est plausible, elle est inférieure à celle de l'hypoténuse.

C. APPLICATION À LA DÉTERMINATION D'UN ANGLE

-> on doit connaître la longueur de l'hypoténuse ;

-> on doit connaître la longueur du côté adjacent à cet angle.



Rédaction :

Le triangle RST est rectangle en S, on peut utiliser les relations trigonométriques.

$$\cos\left(\widehat{STR}\right) = \frac{ST}{RT}$$

$$\cos\left(\widehat{STR}\right) = \frac{150}{180} \simeq 0{,}833$$

Donc $\widehat{STR} \simeq \arccos(0{,}833) \simeq 34\,°$

Attention :

On connaît la valeur du cosinus en calculant le rapport. Pour retrouver l'angle associé, on utilise la calculatrice et la fonction inverse du cosinus : arccosinus !

$$\text{Angle} \quad \underset{\text{arccosinus}}{\overset{\text{cosinus}}{\rightleftarrows}} \quad \text{rapport des longueurs}$$

Pour une rédaction plus experte :

$$\cos\left(\widehat{STR}\right) = \frac{ST}{RT}$$

Donc $\widehat{STR} = \arccos\left(\dfrac{ST}{RT}\right)$

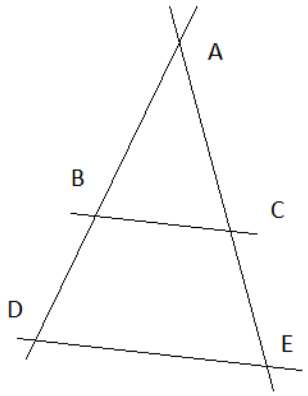
$\widehat{STR} = \arccos\left(\dfrac{150}{180}\right) \simeq 34\,°$ l'approximation n'apparaît que sur le résultat final !

II . THÉORÈME DE THALÈS

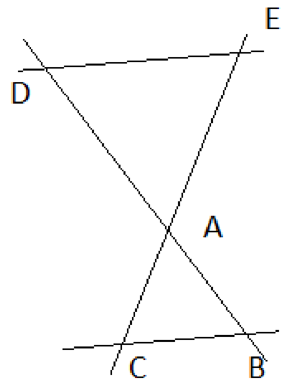
Théorème de Thalès :

Si deux droites (DB) et (EC) sont sécantes en A ;

Si (BC) et (DE) sont parallèles,



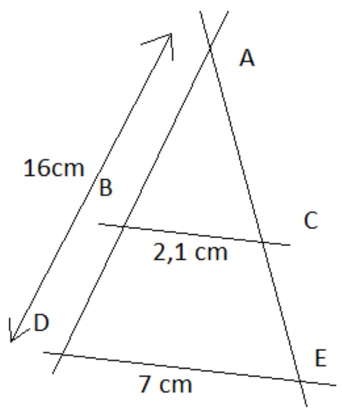
Configuration en triangles emboîtés



Configuration papillon

Alors l'égalité suivante est vraie : $\boxed{\dfrac{CB}{ED}=\dfrac{BA}{DA}=\dfrac{AC}{AE}}$

Application au calcul de longueurs :



(BC) // (ED)

Déterminer AB.

Rédaction possible:

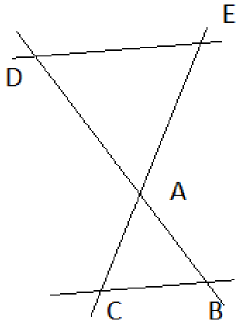
- A, B, D et A, C, E sont alignés ;
- (BC) //(DE)

On peut donc utiliser le théorème de Thalès.

$$\frac{CB}{ED} = \frac{BA}{DA} = \frac{AC}{AE}$$

$$\frac{2{,}1}{7} = \frac{BA}{16} = \frac{AC}{AE}$$

Donc : $BA = \dfrac{16 \times 2{,}1}{7} = 4{,}8 \text{ cm}$



(DE) //(BC)
AD = 3 m
BD = 5 m
EA = 4 m
BC = 1,5 m

(BC) // (ED)

Déterminer toutes les longueurs manquantes.

Rédaction possible:

- A, B, D et A, C, E sont alignés ;
- (BC) //(DE)

On peut donc utiliser le théorème de Thalès.

$$\frac{CB}{ED} = \frac{BA}{DA} = \frac{AC}{AE}$$

$$\frac{1,5}{DE} = \frac{2}{3} = \frac{AC}{4}$$ car BA = 5 - 3 = 2m

Donc :

- $DE = \dfrac{3 \times 1,5}{2} = 2,25 \text{ m} \simeq 2,3 \text{ m}$
- $AC = \dfrac{2 \times 4}{3} = \dfrac{8}{3} \text{ m} \simeq 2,7 \text{ m}$

I . DROITES PARALLÈLES ET CONFIGURATION DE THALÈS

1) CONTRAPOSÉE DU THÉORÈME DE THALÈS

Théorème de Thalès :

- Si deux droites (DB) et (EC) sont sécantes en A ;
- Si (BC) et (DE) sont parallèles,

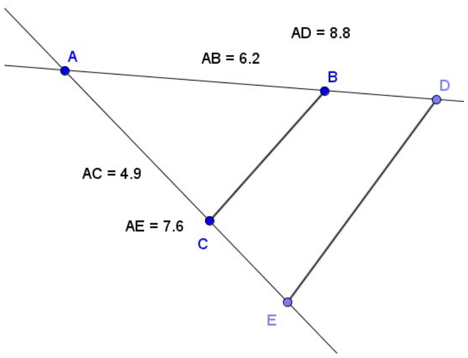
Alors l'égalité suivante est vraie : $\boxed{\dfrac{CB}{ED} = \dfrac{BA}{DA} = \dfrac{AC}{AE}}$

Contraposée du théorème de Thalès :

- Si deux droite (DB) et (EC) sont sécantes en A en configuration de Thalès ;
- Si l'égalité de Thalès n'est pas vérifiée,

Alors les droites (BC) et (DE) ne sont pas parallèles.

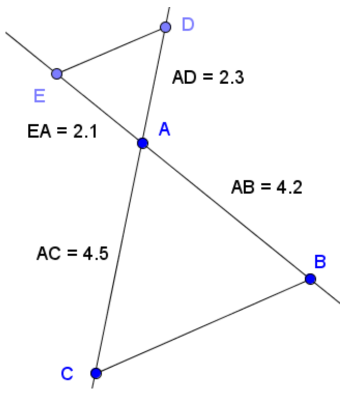
Exemple 1 :



- A,B,D et A,C,E sont alignés dans le même ordre ;
- $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{6{,}2}{8{,}8} \simeq 0{,}70$ et $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{4{,}9}{7{,}6} \simeq 0{,}64$

L'égalité de Thalès n'est pas vérifiée donc les droites (BC) et (DE) ne sont pas parallèles.

Exemple 2 :



- B, A et E ainsi que C, A et D sont alignés dans le même ordre ;
- $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{4{,}5}{2{,}3} \simeq 1{,}96$ et $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{4{,}2}{2{,}1} = 2{,}00$

L'égalité de Thalès n'est pas vérifiée donc les droites (BC) et (DE) ne sont pas parallèles.

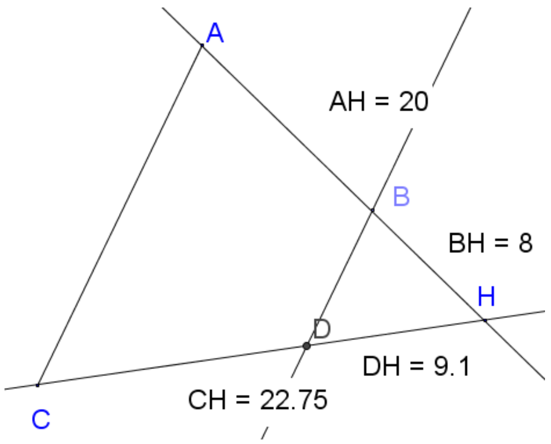
2) RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS

Réciproque du théorème de Thalès :

- Si deux droite (DB) et (EC) sont sécantes en A en configuration de Thalès ;
- Si l'égalité de Thalès est vérifiée,

Alors les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

Exemple 3 :

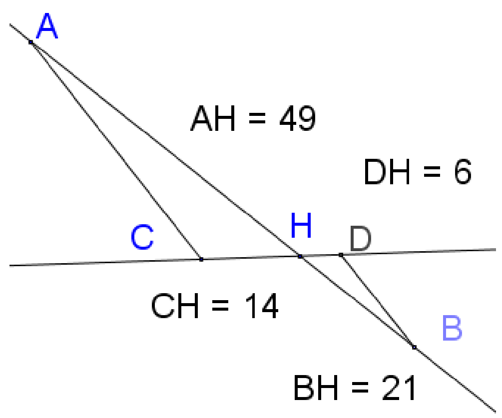


- Les points A,B,H et C,D,H sont alignés dans cet ordre.
- De plus $\frac{AH}{BH} = \frac{20}{8} = 2{,}5$ et

$$\frac{CH}{DH} = \frac{22{,}75}{9{,}1} = 2{,}5$$

L'égalité de Thalès est vérifiée donc les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

Exemple 4 :



- Les points A,B,H et C,D,H sont alignés dans cet ordre.
- De plus $\frac{AH}{BH} = \frac{49}{21} = \frac{7}{3}$ et $\frac{CH}{DH} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

L'égalité de Thalès est vérifiée donc les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

Remarque :

$21 \times 14 = 294$ Pour vérifier si les rapports sont égaux, on peut aussi utiliser leur écriture en fractions irréductibles ou les produits en croix. Pour vérifier si $\frac{49}{21} = \frac{14}{9}$, on calcule : $49 \times 6 = 294$ et $21 \times 14 = 294$. Ces deux méthodes sont plus rigoureuses car elles permettent de ne raisonner que sur des valeurs exactes.